מכרז מחיר שני

בעיית המכרז: יש מוצר, ויש שני שחקנים עם ערכים V_1, V_2 למוצר. רוצים לתת את המוצר לשחקן עם הערך הגבוה ביותר. כדי לפתור במקרה שהשחקנים אסטרטגיים הוספנו תשלומים, כך לשאף אחד מהשחקנים לא משתלם לשקר.

המקרה הכללי: n שחקנים, רוצים לממש פונקציה $f(V1,...,Vn) \to A$.

לכל שחקן V_i רוצים למצוא תשלומים=אוסף פונקציות $\{p_i:V_1x....xV_n \to R\}$ כך שלכל שחקן לא משתלם לשקר.

$F(V_{1,...,}V_n) = a$

נדרוש עבור V_1 שיתקיים:

$$\forall V_1': V_1(a)-p_1(V_{1,...,}V_n)\geq V_1(f(V_1',V_2, \dots,V_n)) - p_1(V_1',V_{2,...,}V_n)$$

כאשר מתקיימת דרישה זו, זה נקרא מכניזם כן(מלשון "אם כנים אתם...") truthful mechanism.

מכרז קומבינטורי:

n שחקנים, m מוצרים, לכל שחקן יש פונקציה $V_i: 2^m \to R^+$

$V_i(\varphi) = 0$

$S \subseteq T \Rightarrow V_i(T) \geq V_i(S)$

המטרה: למצוא חלוקה $S_{1,}\dots,S_n$ של המוצרים כך ש $\sum_i V_i(S_i)$ מתמקסם.

נשים לב שההצגה של הקלט היא אקספוננציאלית. הקלט ניתן בצורת בעל אוב(oracle). הסיבוכיות שנמדוד היא מספר הביטים שעוברים בין השחקנים. עבור סיבוכיות התקשורת של הבעיה נראה את המשפט הבא: עבור n=2 קירוב טוב יותר מ-2- דורש תקשורת אקספוננציאלית.

הוכחה: נגדיר

I: $V(S) = \begin{cases} 0 & |s| < \frac{m}{2} \\ 0/1 & |s| = \frac{m}{2} \\ 1 & |s| > \frac{m}{2} \end{cases}$

II: $V^c(S) = \begin{cases} 0 & |s| < \frac{m}{2} \\ 1-V(S) & |s| = \frac{m}{2} \\ 1 & |s| > \frac{m}{2} \end{cases}$

טענה: נניח $V_1 \neq V_2$. נראה שאם ל (V_1, V_1^c) ול (V_2, V_2^c) יש את אותו רצף התקשורת אזי גם ל (V_1, V_2^c) ול (V_2, V_1^c), יש את אותו רצף התקשורת.

הוכחה: נניח שאנחנו ב (V_1, V_2^c), ונניח ש ל (V_1, V_1^c) ול (V_2, V_2^c) יש את אותו רצף התקשורת. כש B מקבל את ההודעה הראשונה מ A הוא לא יודע להבחין בין הודעה של A ב V_1 לבין הודעה של A ב V_2 ולכן הוא חושב שהוא בV_2 והוא עונה את מה שV_2^c עונה ל

V_2. אבל, תשובה זו, שווה לתשובה ש V_1^c היה עונה ל V_1 ולכן A חושב ש B הוא V_1^c וכן הלאה, ולכן (V_1, V_2^c) מתנהג כמו (V_2, V_2^c) וכמו (V_1, V_1^c).

אותו שיקול נכון כשאנחנו ב (V_2, V_1^c).

נוכיח עכשיו של- (V_1, V_2^c) אין את אותו רצף תקשורת כמו לאחרים:

ערך הפיתרון האופטימלי ב: (V_1, V_1^c) וב (V_2, V_2^c) הוא 1. הערך של הפיתרון האופטימלי ב (V_1, V_2^c) הוא 2:

$V_1 \neq V_2$. כלומר יש קבוצה T בגודל $\frac{m}{2}$ כך ש $V_1(T)\neq V_2(T)$. בה"כ $V_1(T)=1$

ולכן $V_2(T)=0$ ולכן $V_2^c(T^c)=1$. לכן החלוקה (T,T^c) ערכה הוא 2.

נניח בשלילה של-$(V_1\ ,\ V_1^c)$ ול- $(V_2\ ,\ V_2^c)$ יש את אותו רצף התקשורת, אזי הפרוטוקול נותן את אותה חלוקה (R,R^c).

$V_1(R) + V_1^c(R) = 1$

$V_2(R) + V_2^c(R) = 1$

$$\underbrace{V_1(R) + V_1^c(R)}_{=2} + \underbrace{V_2(R) + V_2^c(R)}_{=2} = 2$$

מספר הקבוצות שניתן לחלק בגודל $\frac{m}{2}$ הוא $\binom{m}{\frac{m}{2}}$ אבל לכל אחד מהם ניתן לתת או 0 או 1. ולכן בסך הכול יש לנו

$2^{\binom{m}{\frac{m}{2}}}$ אפשרויות, וכל רצף הוא שונה. אורך קידוד הרצף הארוך ביותר הוא :

$\log(2^{\binom{m}{\frac{m}{2}}}) = \binom{m}{\frac{m}{2}}$, וזה אקספוננציאלי ב m. לסיכום, הוכחנו שהקירוב הטוב ביותר הוא 2.

VCG(Vickrey, Clarke, Groves)

בהינתן בעיה, בה רוצים למקסם את סכום התועלות, נראה מחירים שגורמים לכך שהמכניזם יהיה כן :

עבור השחקן ה i נסמן : A = הפיתרון של האלגוריתם

A^{-i} = הפיתרון שלא מתחשב בשחקן ה i

המחירים יהיו : $\sum_{j\neq i} V_j(A) - \sum_j V_j(A^{-i})$

נגביל את המכרז למקרה שמכונה single minded bidders : כל שחקן מעוניין בחבילה אחת, S, ובכל חבילה שמכילה אותה.

ידוע שאם לבעיה זו יש קירוב : $\forall \varepsilon > 0 : m^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, אזי P = NP.

נראה אלגוריתם $m^{\frac{1}{2}}$ קירוב:

<u>האלגוריתם</u>:

1. כל שחקן i מצהיר- $S_i, V_i(S_i)$
2. נסדר את $\frac{V_i(S_i)}{\sqrt{|S_i|}}$ לפי סדר יורד
3. נניח ששחקן j הוא השחקן הראשון לפי הסידור הנ"ל, ניתן לו את S_j .
4. נעבור לפי הסדר הנ"ל לשחקן הבא, k, אשר ניתן לתת לו את S_k וניתן לו את S_k
5. נחזור על 4. עד שנסיים לעבור על כל השחקנים.

הגדרת המחירים : אם שחקן i לא זכה, המחיר שישלם הוא 0. אם שחקן i זכה, המחיר שהוא ישלם הוא הערך המינימלי $V_i(S_i)$ שהוא היה יכול לנקוב, ועדיין היה זוכה ב S_i.