LP (= תכנות ליניארי)

(4.12.05 תרגול המשך ל- LP)

נזכיר בקצרה:

רוצים למצוא:

$$\min C^t x$$
$$\text{s.t. } Ax = b$$
$$x \geq 0$$

x הוא ממימד n.

נניח כי כל המשוואות הקיימות הן ב״ת (אחרת, ניתן לזרוק חלק את התלויות).

בשיעור זה נסביר כיצד אלגוריתם ה- simplex רץ בפועל.

משפט:

אם x הוא פתרון לוקאלי,

אזי x הוא פתרון גלובאלי.

(ומשפט זה מתווה לנו את דרך הפתרון:

נלך לשכני x ונחפש בהם פתרון טוב יותר

לא מצאנו $\Longleftarrow$ x פתרון אופטימאלי.)

נדגים כיצד פועל האלגוריתם בדוגמה הבאה:

נתון:

יש לפתור את התוכנית הבאה:

$$\begin{aligned}
\text{min:}\quad & 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \\
\text{s.t.}\quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\
& 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
& 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

נרשום את התוכנית בטבלה:

$C^t x$ →	0	3	4	-2	1	-0	
	3	2	1	0	0	1	
$A x$ →	5	1	1	1	0	3	← B
	2	5	1	0	1	4	

בהינתן $x \in P$, נגדיר את הבסיס B_x להיות:

$$\{j \,/\, x_j > 0\}$$

נגדיר את A_x להיות המטריצה שעמודותיה הן איברי B_x.

למה:

A_x בלתי תלויה ליניארית

$\Leftrightarrow$ x קודקוד.

נחזור לדוגמה עימה פתחנו: לאחר דירוג המטריצה נקבל:

-7	-10	0	0	0	-3
3	2	1	0	0	1
2	-1	0	1	0	2
-1	3	0	0	1	3

הקודקוד המתאים לטבלה הוא: $x = (0, 0, 1, 2, 3)$

פונקציית המטרה שלנו השתנתה ל-

$$-7x_1 - 10x_2$$

ככל שנגדיל את x_1 ואת x_2 (בגבולות הפתרון) נקטין את פונקציית המטרה (היא מינימום ו- $x_i \geq 0$).

ניקח את x_1 כעמודת פיבוט (את x_2 נשאיר קבוע 0).
במשוואה הראשונה ניתן להעלות אותו עד 1/3.
במשוואה השניה ניתן להעלות אותו עד 1.
במשוואה השלישית ניתן להעלות אותו עד 3.

(הכוונה ב"ניתן להעלות"- היא להעלות עד לאיפוס ה- x_i במשוואה ה-i-ית, תוך כדי שמירה על הכללים.)

נסתכל על המשוואה הראשונה:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

נרצה להעלות את הערך של x_1 כמה שיותר.
(נזכור כי $x_2=0$ ולכן ניתן להתעלם ממנו).
נדרוש כי: $x_3 \geq 0$.
ולכן, אפשר להעלות את הערך של x_1 להיות 1/3 ולא יותר.
פשוט כי בחרנו את $x_3=0$.

נגדיר: **שורת הפיבוט:**
השורה מבין עמודות הפיבוט היוצרת את התנאי החמור ביותר.

כעת הבסיס שלנו יורכב מהעמודות 1, 4 ו- 5:

$$(*, 0, 0, *, *)$$

השלב הבא (לאחר דירוג המטריצה):

0	-16/3	7/3	0	0	-2/3
1	2/3	1/3	0	0	1/3
0	-7/3	-2/2	1	0	4/3
0	11/3	1/3	0	1	10/3

המקדם השלילי היחידי שלנו הוא x_2 ועל כן הוא יקבע כפיבוט.

ברגע שכל המקדמים (בפונקציית המטרה (= השורה הראשונה בטבלה)) יהיו חיוביים נגיע למינימום לוקאלי. $\Leftarrow$ ע"פ המשפט נגיע למינימום גלובאלי.

<u>זרימה ברשת</u>

המשך מהשיעור שעבר:

תזכורת:

לכל סחורה i:

מצאנו מסלולים אפשריים:

$$t_1^i, t_2^i, \ldots, t_p^i$$

בוחרים מסלול אחד בהסתברות:

$$\frac{y_1^i}{1+\varepsilon}, \frac{y_2^i}{1+\varepsilon}, \ldots, \frac{y_p^i}{1+\varepsilon}$$

טענה 1:

הסיכוי שקיימת צלע שהזרמנו בה יותר מדי $\le 1/4$.

פורמאלית נראה:

$$pr[\sum A_i^e > c(e)] \le 1/4$$

טענה 2:

הערך של הפתרון קטן מדי מתקבל בהסתברות $\le 1/4$.

פורמאלית נראה:

$$pr[ALG \le (1-\varepsilon)^2 OPT_f) \le 1/4$$

בכדי להוכיח את הטענות נשתמש בגרסה הבאה של משפט צ'רנוב:

משפט (צ'רנוב):

יהיו $x_1, x_2, \ldots, x_n$ משתנים מציינים המקבלים 1 בהסתברות:

$p_1, p_2, \ldots, p_n$.

נסמן ב- X את סכומם וב- N את תוחלתם ($N = \Sigma p_i$).

אזי:

$$\text{pr}\ [\ x > (1+\varepsilon)\ N] \le 2^{-N\varepsilon 2/6}$$

$$\text{pr}\ [\ x < (1-\varepsilon)\ N] \le 2^{-N\varepsilon 2/4}$$

הוכחת I:

נגדיר A_i^e להיות המשתנה המקרי הקבוע אם הזרמנו את הסחורה הזו בצלע e.

הערה:

$\forall i$, A_i^e ב"ת.

כמו כן, נשים לב כי:

$$\text{pr}[\ A_i^e = 1] = \frac{\sum_{j | e \in t_i^j} y_j^i}{1+\varepsilon}$$

מה התוחלת של $\sum_{i \in m} A_i^e$?

היא קטנה מ- $\mu = \frac{c(e)}{1+\varepsilon}$.

$$pr[\sum A_i^e > c(e)] = pr[\sum A_i^e > (1+\varepsilon)\mu]$$

$$\leq 2^{(-c(e)/(1+\varepsilon)-(1+\varepsilon)^2)/6} \longrightarrow \text{צ'רנוף}$$

$$\leq \frac{1}{4|E|} \longrightarrow$$

1. c(e) = o(log(|E|)
2. $2^{-\log x} \leq \frac{1}{x}$

בהסתברות $\geq 1/4$ נקבל קיימת צלע לא תקינה (מחסם האיחוד).

הוכחת II:
נגדיר משתנה מקרי:
B_i: האם הזרמנו את הסחורה ה-i-ית.
מתקיים:

$$pr[b_i = 1] = \frac{f_i}{1+\varepsilon}$$

מה התוחלת?

$$\frac{OPT_f}{1+\varepsilon} \longrightarrow \sum_{i\in m} f_i = OPT_f$$

הבחנה:
המקרה ה"מעניין" הוא כאשר:

$$OPT_f \geq O(\log|E|)$$

(אחרת, הקיבולות לא מציבות שום מגבלה על הפתרון, כי בכל צלע ניתן להכניס את כל מה שיכול לזרום).

$$pr[ALG \leq (1-\varepsilon)^2 OPT_f) \leq pr[\sum B_i < (1-\varepsilon)\frac{OPT_f}{1+\varepsilon}]$$

$$\leq 2^{-\frac{\varepsilon^2 \frac{OPT_f}{1+\varepsilon}}{4}}$$

$$\leq \frac{1}{4|E|}$$

קיבלנו חסם $(1-\varepsilon)^2$.
מ.ש.ל.