אלגוריתמים מתקדמים – סיכום תרגול 15.1.2005

בעיית Demands multi-commodity flow

נתון גרף ממושקל G=(V,E) עם קיבולות על הצלעות c(e). נתונים k זוגות:
$\{(s_1,t_1),(s_2,t_2),..,(s_k,t_k)\}$ עם סחורה נפרדת לכל זוג וביקוש dem(i).

<u>המטרה:</u>

מציאת קבוע f כך שכל סחורה מוזרמת f*dem(i) יחידות. מותר לפצל סחורות במסלולים שונים.

<u>הגדרה:</u>

בהנתן חתך $(S,\overline{S})$ נגדיר את c(S) להיות הקיבולת של S – כלומר סכום הקיבולות על הצלעות.

$$c(S)=\sum_{e\in(s,\overline{s})}c(e)$$

<u>הגדרה:</u>

בהנתן חתך $(S,\overline{S})$ נגדיר את dem(S) להיות הביקוש של החתך S – כלומר סכום הביקושים של סחורות שצריכות לעבור את חתך S.

$$dem(S)=\sum_{i|s_i\in S\wedge t_i\in\overline{S}}dem(i)$$

<u>הגדרה:</u>

Sparsity של חתך S הינו $\frac{c(S)}{dem(S)}$.

<u>המטרה:</u>

מציאת S שימזער את $\frac{c(S)}{dem(S)}$. כמו כן ברור כי $f\le\frac{c(S)}{dem(S)}$. נשים לב שכאשר k=1 אזי זוהי בעיית Max-flow Min-cut.

<u>תכנית (לא לינארית בשלמים) לפתרון הבעייה:</u>

נגדיר $d_e\in\{0,1\}$ משתנה מציין עבור צלע e האם נמצאת בחתך.

נגדיר $l_i\in\{0,1\}$ משתנה מציין עבור סחורה i האם מנותקת על ידי החתך.

התכנית היא:

$$\min\frac{\sum c(e)d_e}{\sum dem(i)l_i}$$
$$s.t.$$
$$\sum_{e\in q_j}d_e\ge l_i$$
$$l_i,d_i\in\{0,1\}$$

נשים לב שאם נכניס דרישה $\sum dem(i)l_i=1$ אזי התכנית תהפוך לתכנית לינארית.

מדוע מותר לעשות זאת: אם קיים פתרון (d,l) לתכנית אזי גם $(\alpha\cdot d,\alpha\cdot l)$ הינו פתרון לתכנית בעל אותו הערך (עבור כל α).

טענה:

הפתרון האופטימלי של ה LP מגדיר מטריקה. הנקודות במרחב הן הקדקדים ב V ופונקציית המרחק d(u,v) מוגדרת להיות d_e כאשר יש צלע בין u ל v או המסלול הקצר ביותר בין u ל v אחרת.

הוכחה:

נראה שמתקיים אי שוויון משולש. נתונים קדקדים $u,v,w \in V$. נניח בשלילה $d_{v,w} > d_{v,u} + d_{u,w}$. אזי נגדיר מסט הנקודות הנ"ל מטריקה כלומר נגרום לכך ש $d_{v,w} = d_{v,u} + d_{u,w}$. פתרון זה הינו פיזיבילי כי $d_{v,u} + d_{u,w} \geq l_i$ ולכן גם $d_{v,w} \geq l_i$ כלומר אם היינו עושים את הצעד הנ"ל גם היינו נשארים עם פתרון תקין וגם מורידים את פונקציית המטרה – בניגוד להנחה שהפתרון הינו אופטימלי.

טענה:

ניתן לקבוע $l_i = d_{s_i,t_i}$. האילוץ היחידי שיכול להיות מופר כתוצאה מהנ"ל הוא $\sum dem(i) l_i = 1$ ואז נחלק בקבוע ונשאר עם פתרון תקין.

הגדרה (Cut Packing):

נגדיר פונ' y שתיתן ערך אי שלילי לכל חתך כך שלכל $e \in E_n$ (כאשר E_n הינו הגרף השלם על V):

$$\sum_{S|e\in S} y(s) \leq d_e$$

Cut packing מדוייק עם עבור כל צלע $e \in E_n$ $\sum_{S|e\in S} y(s) = d_e$

Cut packing β מקורב עם עבור כל צלע $e \in E_n$ $\frac{d_e}{\beta} \leq \sum_{S|e\in S} y(s) \leq d_e$.

משפט:

בהנתן y שהוא Cut packing β מקורב (ביחס ל E_n והתכנית הלינארית) יהי $(S,\bar{S})$ החתך הדליל ביותר עם $y(s) \neq 0$ אזי צפיפות החתך היא לכל היותר $\beta * opt^*$.

$$opt^* = \frac{\sum_{e\in E} c(e) d_e}{\sum_{i=1}^{k} dem(i) l_i} = \frac{\sum_{e\in E} c(e) d_e}{\sum_{i=1}^{k} dem(i) d_{s_i,t_i}} \geq_{(1)} \frac{\sum_{e\in E} c(e) \sum_{S|e\in S} y(S)}{\sum_{i=1}^{k} dem(i) \sum_{S|s_i,t_i\in S} y(S)} =$$

$$\frac{\sum_S y(S) c(S)}{\beta \cdot \sum_S y(S) dem(S)} \geq_{(2)} \frac{1}{\beta} \min_S \frac{c(S)}{dem(S)}$$

(1) בגלל ה Cut packing

(2) ראינו בתרגיל קודם ש $\frac{\sum_i \alpha_i a_i}{\sum_i \alpha_i b_i} \geq \min_i \frac{a_i}{b_i}$