<u>אלגוריתמים מתקדם – תרגול 8/01/2006</u>

<u>הוכן ע"י: קושרובסקי יורי</u>

בשבוע שעבר החלנו לדון במכרז קומבינטורי:

N שחקנים, M מוצרים. כל שחקן i מעוניין בסחורה S_i במחיר V_i (או בכל חבילה אשר מכילה אותה). ברצוננו לתכנן מנגנון כן (incentive compatible) כך שנמקסם את סכום התועלות:

$$\max \sum_{\text{i got } S_i} V_i$$

<u>אלגוריתם:</u>

1. נסדר את השחקנים לפי $\frac{V_i}{\sqrt{|S_i|}}$
2. ניתן את S_i לשחקן ה i-י $i=1,2,3\ldots$.
3. נמחק מהרשימה את כל ה j-ים כך ש- $S_i \cap S_j \neq \varnothing$ (כלומר כל אותם אלה כבר לא יכולים לקבל את המוצרים שאותם רוצים) ונחזור ל-2.

כעת, נדון בתשלומים שכל שחקן יצטרך לשלם. שחקן אשר לא זכה לא ישלם מאומה. על שחקן אשר זכה יהיה לשלם את הסכום המינימאלי אשר היה יכול להצהיר ועדיין לזכות. (מצהירים על S_i ועל V_i).

<u>למה:</u> *נסמן ב- ALG את קבוצת הזוכים באלגוריתם שלנו וב- OPT את קבוצת הזוכים באלגוריתם האופטימלי. אזי:* $\sum_{V_i \in OPT} V_i \le \sqrt{m} \sum_{V_i \in ALG} V_i$

<u>הוכחה:</u>

$$\text{(*)} \qquad \sqrt{\sum_{V_i \in ALG} V_i^2 \frac{|S_i|}{|S_i|}} = \sqrt{\sum_{V_i \in ALG} V_i^2} \le \sum_{V_i \in ALG} V_i$$ =הערך של הפתרון שלנו

$$\text{(**)} \qquad \sqrt{\sum_{V_i \in OPT} \frac{V_i^2}{|S_i|}}\sqrt{m} \ge \sqrt{\sum_{V_i \in OPT} \frac{V_i^2}{|S_i|}}\sqrt{\sum |S_i|} \underset{C.S}{\ge} \sum_{V_i \in OPT} V_i \frac{|S_i|}{|S_i|}$$ = הערך של הפתרון האופטימלי

כעת, אם נוכיח ש- $\sum_{V_i \in OPT} \frac{V_i^2}{|S_i|} \le \sum_{V_i \in ALG} V_i^2 \frac{|S_i|}{|S_i|}$ אז מ-(*) ו- (**) נסיים את ההוכחה.

לשם כך, נזכר שעבור כל $i \in ALG$ פסלנו לכל היותר $|S_i|$ שחקנים ב- OPT. נסמן את קבוצת השחקנים הזו ב- OPT_i. (אלו הם השחקנים שקיבלו את המוצרים המבוקשים ב- OPT)

ולכן: $$\sum_{j\in OPT}\frac{V_i^2}{|S_j|}\le\frac{V_i^2}{|S_i|}|S_i|$$

$$\underbrace{\sum_{i\in ALG}\sum_{j\in OPT}}_{\text{All players in OPT}}\frac{V_i^{\,2}}{|S_j|}\le\sum_{i\in ALG}\frac{V_i^{\,2}}{|S_i|}|S_i|$$

מ.ש.ל

<u>למה:</u> *לשחקן ה i-י ההצהרה S_i תמיד טובה לפחות כמו כל הצהרה אחרת.*

<u>הוכחה:</u> לא כדאי להצהיר $S_i\subset S^*$ כי אז יש פריטים שהוא אינו רוצה אך רק מנמיך את עצמו בסדר $\frac{V_i}{\sqrt{|S_i|}}$. לא כדאי להצהיר $S_i\supset S^*$ כי אז הקבוצה S^* לא שווה כלום בשבילו (ואף אולי יצטרך לשלם עליה). מ.ש.ל

<u>למה:</u> *לשחקן ה i-י ההצהרה V_i תמיד טובה לפחות כמו כל הצהרה אחרת.*

<u>הוכחה:</u> באופן דומה להוכחה הקודמת. לא שווה יותר מאשר V_i כי אז ייתכן שיצטרך לשלם יותר מ- V_i. לא שווה לו להצהיר פחות מ- V_i כי אז הוא רק מנמיך את עצמו בסדר $\frac{V_i}{\sqrt{|S_i|}}$ ואז ייתכן ולא יזכה. ואם יזכה אז בכל אופן מה שהוא משלם נקבע לפי השחקן הבא שלא קיבל את מבוקשו. לכן, בכך שהצהיר פחות מ- V_i הוא לא ירוויח. מ.ש.ל

כעת, נדון בבעיה חדשה:

<u>בעיית digital goods:</u> למוכר ישנם N מוצרים זהים וישנם N קונים. כל אחד מבין הקונים מעוניין במוצר **אחד** בלבד עם ערך V_i.

המטרה: למצוא לכל שחקן מחיר p_i כך ש- $\sum_{Vi>P_i}P_i$ יתמקסם.

- נשווה את הפתרון למחיר היחיד P שממקסם את $\sum_{V\,i>P}V_i$
- אלגוריתם ייקרא α תחרותי אם $\alpha\sum_{Vi>P_i}p_i>\sum_{Vi>P}V_i$

על מנת לפתור את הבעיה הזאת, נדון תחילה בבעיה אחרת:

בעיית Cost-Sharing: ברצוננו לבדוק האם שחקנים מוכנים להחזיר את שווי המוצר אשר עומד על C.

אלגוריתם:

- כל שחקן יצהיר את ה-V_i שהוא מוכן לשלם.
- המדינה תמצא את ה-K המקסימלי כך ש- $\sum_{V_i > \frac{C}{K}} \frac{C}{K} > C$

למה: *המכניזם הינו כן.*
הוכחה: אם אנו משתתפים ב-Cost-Sharing, נשלם `P. כעת, אם `V>P אז לא כדאי לשקר ולומר פחות מ-V כי ממילא נשלם `P.
אם נצהיר יותר מ- V אז אנו עלולים לשלם יותר ממה ערכו של המוצר עבורנו. לכן לא משתלם לשקר. מ.ש.ל

כעת, נחזור לבעיית digital goods.

סימון: $V_{\max} := \max_i (V_i)$

הנחה: נניח שישנם לפחות 2 שחקנים כך ש- $V_i=V_j=V_{max}$

המכניזם:

- נחלק את השחקנים שלשתי קבוצות F_1,F_2 (כל שחקן ייפול לכל קבוצה בהסתברות $\frac{1}{2}$).
- נחשב את התמורה האופטימלית P_1 ב- F_1 ואת התמורה האופטימלית P_2 ב- F_2.
- נבצע Cost-Sharing לשחקני F_1 כאשר $C_1=P_2$ לשחקני F_2 כאשר $C_2=P_1$.

למה: המכניזם כן.
הוכחה: אין טעם לשקר מאחר והמחיר שיוצע לנו לשלם נקבע על פי ההצהרות של חברי הקבוצה השנייה וכלל לא תלויי בהצהרות של הקבוצה של השחקן (ובפרט לא בהצהרה של כל שחקן ספציפי). לכן, הערך שכל שחקן מצהיר לא משפיע על הסכום שאותו יאלץ לשלם. לפיכך, אין שום תועלת לשקר מ.ש.ל

למה: המכניזם הינו 4-תחרותי.
הוכחה: נניח כי המחיר האופטימלי הוא P וישנם K שחקנים בפתרון האופטימלי, אזי התמורה של האלגוריתם האופטימלי היא KP.
נסמן ב-K_1 ו- K_2 את המשתנה המקרי המציין את מספר השחקנים מ- F_1 ו- F_2 (בהתאמה)

אשר היו בפתרון האופטימלי.
נשים לב ש- $K_1+K_2=K$
התמורה של המכניזם שלנו היא $\min(P_1,P_2)$

כעת, $\frac{\min(P_1,P_2)}{OPT} \geq \frac{\min(PK_1,PK_2)}{PK} = \frac{\min(K_1,K_2)}{K}$

נעשה תוחלת ונקבל:

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\min(i,k-i)\Pr\left\{\min(i,k-i)=i\right\} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\min(i,k-i)\binom{k}{i}2^{-i} \geq \frac{1}{4}$$

מ.ש.ל