5/11/05

אלגוריתם מתקדם
תרגול

בעיות אופטימיזציה

לכל פלט I נגדיר מחיר A(I).
<u>מטרה:</u> למזער את המחיר

<u>טענה</u>: אם קיים פתרון אופטימלי לבעיית אופטימיזציה אז קיים פתרון לבעיית הכרעה.
<u>הוכחה</u>: בהנתן פתרון אופטימלי לבעיית מינימיזציה, נחשב את מחירו, c. כעת נוכל להכריע האם קיים לבעיה פתרון קטן או שווה ל-x. אם x<c התשובה היא לא. ואחרת, התשובה היא כן.

<u>הגדרה:</u> *Independent Set*: קבוצת קדקדים בגרף כך שאם $u,v \in I.S$ אז $(u,v) \notin E$.
דוגמא לבעיית מקסימיזציה: מציאת I.S בגודל מקסימלי.

בעיית ההכרעה האם יש I.S בגודל לפחות k היא NP שלמה. ולכן גם פתרון אופטימלי לבעיית המקסימיזציה של I.S היא NP קשה.

Vertex Cover

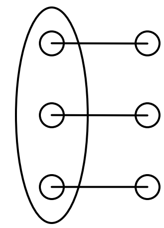
V.C היא קבוצת קדקדים בגרף כך שמתקיים: $\forall (u,v) \in E, u \in V.C \; or \; v \in V.C$.
<u>טענה:</u> קיים V.C בגודל t $\Leftrightarrow$ קיים I.S בגודל |V|-t.

הוכחת הטענה נובעת מ-2 הלמות הבאות:
<u>למה 1:</u> $\overline{VC}$ הוא I.S.
<u>למה 2:</u> $\overline{I.S}$ הוא V.C.
ולכן אם קיים V.C בגודל t אז $\overline{VC}$ הוא I.S וגודלו הוא |V|-t כנדרש.
ואם קיים I.S בגודל |V|-t אז $\overline{I.S}$ הוא V.C וגודלו הוא t כנדרש.

<u>הוכחה 1:</u> נניח ש $\overline{VC}$ אינה I.S. אז קיימים $u,v \in \overline{VC}$ כך ש $(u,v) \in E$. מאחר ש $u,v \in \overline{VC}$, מתקיים: $u,v \notin VC$. בסתירה לכך שיש ביניהם צלע.

<u>הוכחה 2:</u> נניח ש $\overline{I.S}$ אינו V.C. אז קיימים $(u,v) \in E$, כך ש $u \notin \overline{I.S} \; and \; v \notin \overline{I.S}$. ולכן $u \in I.S \; and \; v \in I.S$. בסתירה לכך שיש בינהם צלע.

נסתכל על הדוגמא הבאה של V.C:



בחירת כל הקדקדים בגרף, Alg=|V| הוא אלגוריתם קירוב 2 ל V.C. (האלגורתם האופטימלי מקיים: OPT=|V|/2), למשל הקבוצה המוקפת באליפסה). לפי הטענה, קיים I.S בגודל $|\overline{V}|=0$. אבל זה לא מוסיף אינפורמציה.
זו דוגמא לקירוב בעיית מינימום שאינה עוזרת לפתור בעיית מקסימום, על אף שקיימת רדוקציה בין הבעיות.

ידוע שלכל $\varepsilon>0$ קירוב של $1/n^{1-\varepsilon}$ לבעיית מציאת ה I.S המקסימלי הוא NP קשה. כלומר, מציאת אלגוריתם ALG לבעיית ה I.S המקסימלי המקיים $ALG>OPT\cdot(1/n^{1-\varepsilon})$ היא בעיה NP קשה.
לעומת זאת, קיים אלגוריתם קירוב 2 לבעיית מציאת ה .V.C המינימלי. כלומר, קיים אלגוריתם פולינומי ALG המקיים: $ALG\leq 2\cdot OPT$. פירוט האלגוריתם: מוצאים זיווג מקסימלי בגרף ומכניסים לכיסוי את הקדקדים של כל הצלעות בזיווג המקסימלי. פירוט מלא מופיע בסיכום ההרצאה הראשונה.

זו דוגמא יוצאת דופן. ככלל אצבע, בעיות מינימיזציה הן קשות מבעיות מקסימיזציה.

בעיית הסוכן הנוסע, T.S.P

נתון גרף $G=(V, E, w)$, כאשר $w: V\times V\rightarrow R^+$ ומקיימת את אי שיוויון המשולש,
$\forall i,j,k\in V, w(i,j)+w(j,k)\geq w(i,k)$
<u>המטרה</u>: למצוא מעגל המילטוני בעל משקל מינימלי.
<u>משפט</u>: קיים קירוב 2 לבעיה, כלומר, יהי cost(OPT) מחיר הפתרון האופטימלי. אז קיים אלגוריתם המוצא בזמן פולינומי מעגל המילטוני בעל משקל קטן או שווה ל $2\cdot cost(OPT)$.

<u>טענה:</u> עץ פורש מינימלי (Minimum Spanning Tree, M.S.T) הוא חסם תחתון (Lower Bound) ל OPT.
<u>הוכחה:</u> נתבונן ב OPT. זהו מעגל המילטוני העובר דרך כל הקדקדים בגרף. נסיר ממנו צלע. קיבלנו עץ פורש. משקל העץ הפורש המינימלי קטן או שווה למשקל של כל עץ בגרף. ולכן: $M.S.T\leq OPT$.

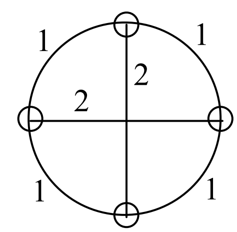
<u>האלגוריתם למציאת קירוב 2 לבעיית הסוכן הנוסע:</u>
1. נמצא M.S.T.
2. נבחר קדקד ובשיטת D.F.S נטייל בכל הקדקדים בגרף.
3. נסיר קדקדים שחוזרים פעמיים ונקבל מעגל המילטוני.

<u>הוכחה לקירוב 2:</u>
עלות המסלול לפני המחיקות: $2\cdot M.S.T$, כי אנו עוברים בכל צלע בעץ פעמיים.
המחיקות לא מעלות את העלות בגלל אי שיוויון המשולש, $w(i,j)+w(j,k)\leq w(i,k)$, כי מעבר מעבר ישיר מקדקד i לקדקד k לאחר מחיקת הקדקד j קטן או שווה למעבר מקדקד i לקדקד k דרך קדקד j.
ולכן, לאחר המחיקות המחיר קטן או שווה למחיר לפני המחיקות: $ALG\leq 2\cdot M.S.T$.

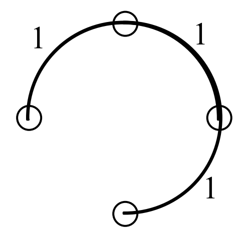
מאחר ש $M.S.T \le OPT$ נקבל כי:
$ALG \le 2 \cdot M.S.T \le 2 \cdot OPT$

<u>טענה</u>: הקירוב של אלגוריתם זה הוא הדוק.
<u>הוכחה</u>: נסתכל על n קדקדים במעגל. המשקל של כל צלע המחברת קדקדים שכנים על המעגל הוא 1. המשקל של כל צלע המחברת קדקדים שאינם שכנים על המעגל הוא אורך המסלול הקצר ביותר על המעגל המחבר ביניהם.
ניתן לראות שמשקל המעגל ההמילטון המינימלי הוא n.
משקל העץ הפורש המינימלי הוא: n-1. זהו העץ המתקבל מהורדת צלע אחת מהמעגל ההמילטוני המינימלי.

דוגמא עבור n=4:



עץ פורש מינימלי:



אם n זוגי ונבחר לעץ שורש שהוא במקום ה n/2 מימין ונלך מהשורש תחילה ימינה ואח"כ שמאלה נקבל שמשקל המעגל ההימלטוני המתקבל מהאלגוריתם הוא:
2(n-1).
היחס בין ALG לבין OPT הוא אם כן:
$ALG/OPT=2(n-1)/(2n)$. וכאשר n גדל, נקבל שהגבול שואף ל-2.

MAX CUT

נתון גרף $G=(V,E)$
<u>המטרה:</u> למצוא חתך מקסימלי
נגדיר:
חתך בגרף: חלוקת הקדקדים לשתי קבוצות, V_1, V_2.
הגודל של החתך: מספר הצלעות (v1,v2) כך ש $v1 \in V1, v2 \in V2$.

<u>האלגוריתם:</u>

1. נתחיל מחלוקה שרירותית של V ל V_1 ול V_2.
2. כל עוד קיים קדקד שיש לו יותר שכנים בקבוצה שלו מאשר בקבוצה השניה, נעביר את הקדקד לקבוצה השניה.

<u>משפט:</u> זהו קירוב 2, כלומר $ALG \le 2OPT$.

<u>למה:</u> האלגוריתם מסתיים בזמן פולינומי.
<u>הוכחה:</u> $OPT \le |E|$. כי נובע ישירות מההגדרה שגודל החתך חסום מלמעלה על ידי מספר הצלעות בגרף. מאחר שבכל שלב, גודל החתך גדל בצלע אחת לפחות, האלגוריתם נעצר אחרי $|E|$ צעדים לכל היותר.

<u>למה:</u> $ALG \ge OPT/2$.
<u>הוכחה:</u> לכל קדקד v נגדיר את הקבועים הבאים:
Iv: מספר השכנים בקבוצה שלו בסיום האלגוריתם.
Cv: מספר השכנים בקבוצה השניה בסיום האלגוריתם.

$$2ALG = \sum_{v \in V} Cv$$

כי כל צלע של החתך נספר פעמיים.

$$\sum_{v \in V} Cv \ge \sum_{v \in V} Iv$$

$\forall v \in V \; Cv \ge Iv$ כי אחרת האלגוריתם לא היה נעצר.

$$|E| = \frac{\sum_{v \in V} Cv + \sum_{v \in V} Iv}{2}$$

$$\Rightarrow ALG \ge \frac{|E|}{2}$$