LP (= תכנות ליניארי)

הגדרה:

נתונים:

משתני הבעיה: $x_1,x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$

מקדמי המשתנים: $c_1,c_2, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$

ומקדמים נוספים: $b_1,b_2, \ldots, b_m \in \mathbf{R}$.

וכן: $\forall i, j: 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n,\ a_{i,j} \in \mathbf{R}$

האילוצים: עלינו לקיים את מערכת המשוואות הבאה:

$$\text{m משוואות}\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \le b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{21,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \ge b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \ldots + a_{3,n}x_n = b_3 \\ . \\ . \\ . \end{array}\right.$$

כל משוואה היא או אי-שוויון או שוויון.

את ה- $a_{i,j}$ ניתן לקבץ במטריצה מסדר $n*m$.

המטרה: למצוא מינימום או מקסימום של הסכום:

$$c_1x_1+c_2x_2+\ldots + c_nx_n$$

נסמן:

$X = [x_1,x_2, \ldots, x_n] \in \mathbf{R}^n$

$\mathbf{C} = [c_1,c_2, \ldots, c_n] \in \mathbf{R}^n$

$B = [b_1,b_2, \ldots, b_m] \in \mathbf{R}^m$

בעיה לדוגמא- בעיית הדיאטה:

נניח שיש לנו i פריטי מזון.

x_i- מייצגים את כמות המזון אותה נאכל מכל פריט מזון.

b_i- מייצגים כמה יחידות ויטמינים מכל מזון.

c_i- מייצגים כמה קלוריות מצויות בכל פריט מזון.

$a_{i,j}$- מייצגים כמה ויטמינים יש בכל פריט מזון.

המטרה:

לאכול את כמות הויטמינים הדרושה (לקיים את מגבלות המטריצה A, תוך אכילת מספר קלוריות מינימאלי.

LP בהצגה קנונית (סטנדרטית)

1. כל האי-שיוויונים הם מצורה $\ge$ (=).

$Ax \ge B$ ($Ax = B$)

2. כל המשתנים הם אי-שליליים.

$x \ge 0$

3. פונקצית המטרה הינה מינימום.

$\min C^t X$

כיצד נהפוך בעיית LP כללית לבעיה בהצגה קנונית?

בכדי לקיים את תכונה 1 :

אי-שיוויון $\le$: נכפול ב- 1- את שני האגפים.

שיוויון יהפוך לשני אי-שיוויונים (ובאי-שיוויון $\le$ נטפל כפי שעשינו לעיל).

בכדי לקיים את תכונה 2 :

עבור משתנה x_i היכול לקבל ערכים שליליים יומר בצורה הבאה :

$$x_i = y_i^+ - y_i^-$$
$$y_i^+ \ge 0,$$
$$y_i^- \ge 0.$$

בכדי לקיים את תכונה 3 :

בהינתן פונקציית מטרה maximum נכפול אותה ב- 1-.

כיצד נהפוך בעיית LP כללית לבעיה בהצגה סטנדרטית?

בכדי לקיים את תכונות 2 ו-3 נפעיל את אותם שלבים שהפעלנו על מנת לקיימן בהצגה הקנונית.

בכדי לקיים את תכונה 1 :

בהינתן משוואה מהצורה :

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \ge b_1$$

נעבור למשוואה מהצורה :

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 + z_1$$
$$z_1 \ge 0$$

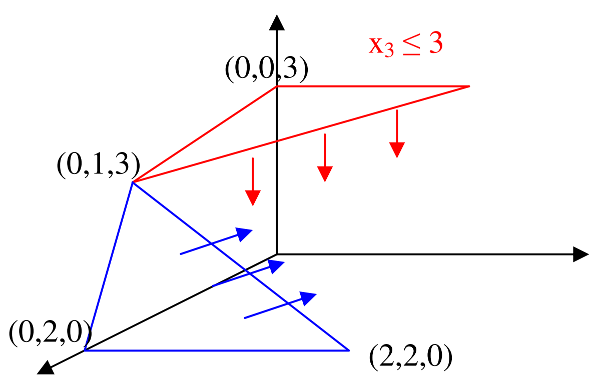
דוגמא לבעיית תכנון לינארי עם 3 משתנים :

בדוגמא זו ניתן אינטואיציה גיאומטרית לבעיית התכנות הליניארי. בעייה זו איננה מוצגת בצורה הקנונית או הקלאסית)

היות ונתונים לנו 3 משתנים, נעבוד במרחב $\mathbf{R}^3$:

נניח שקיבלנו את המשוואות הבאות :

$$x_3 \le 3$$
$$3x_2 + x_3 \le 6$$



והתחום המקיים את המגבלות הוא תחום החיתוך בין השטח האדום לכחול

<u>הגדרות:</u>

מרחב הפתרונות האפשריים: (ל- LP בהצגה הסטנדרטית)

$P= \{x \in \mathbf{R}^n \,/\, Ax = b, \mathbf{x} \geq 0\}$

LP אפשרית: אם $P \neq Ø$

LP לא חסומה:

אם לכל $\gamma \in \mathbf{R}$,

קיים $x \in \mathbf{P}$ כך ש- $C^t X \geq \gamma$.

אחרת, היא חסומה ← קיים פתרון אופטימאלי.

תת מרחב ליניארי:

תת קבוצה S של $\mathbf{R}^n$,

הסגורה ביחס לחיבור וקטורי והכפלה בסקלר.

$\Longleftrightarrow$ $x \in S$ הוא פתרון של מערכת משוואות הומוגניות.

$S = \{ x \in \mathbf{R}^n \,/\, Ax = 0\}$

הנחה: A היא מטריצה מסדר m.

מימד:

המספר המקסימאלי של וקטורים בת״ל ב- $S = \dim(S)$.

$= n - \text{rank}(A)$ ⟵ *משפט המימדים*

תת מרחב אפיני:

תת מרחב וקטורי המוזז בווקטור.

$F = u + \mathbf{S} = \{ u + s \,/ s \in \mathbf{S} \}$

$F = \{ x \in \mathbf{R}^n \,/\, Ax = b\}$ $\quad\Longleftrightarrow$

$A(x)= A(x)+Au=Au$

$\dim (F) = \dim (S)$

מימד של קבוצה ב- $\mathbf{R}^n$:

המימד של התת-מרחב האפיני המינימאלי המכיל את הקבוצה.

על מישור: (Hyper plane)

תת מרחב אפיני של $\mathbf{R}^n$ ממימד n-1.

$H= \{ x \in \mathbf{R}^n \,/\, ax = \beta, a \neq 0\}$

חצי מרחב (סגור):

$H^+= \{ x \in \mathbf{R}^n \,/\, ax \geq \beta, a \neq 0\}$

$H^-= \{ x \in \mathbf{R}^n \,/\, ax \leq \beta, a \neq 0\}$

פאון:

חיתוך סופי לא ריק של חצאי- מישורים של $\mathbf{R}^n$.

קבוצה קמורה:

קבוצה $\mathbf{S}$ ב- $\mathbf{R}^n$, כך שלכל $x, y \in \mathbf{S}$, גם הקטע המחבר את x עם y שייך ל-**S**.

פאון הוא קבוצה קמורה (כי הוא אוסף סופי של קבוצות קמורות).

דופן: (face)

חיתוך של הפאון עם על מישור השווה לחיתוך עם חתי המרחב המתאים.

$$f= P \cap H = \begin{cases} P \cap H^+ \\ P \cap H^- \end{cases}$$

סוגי חיתוכים:

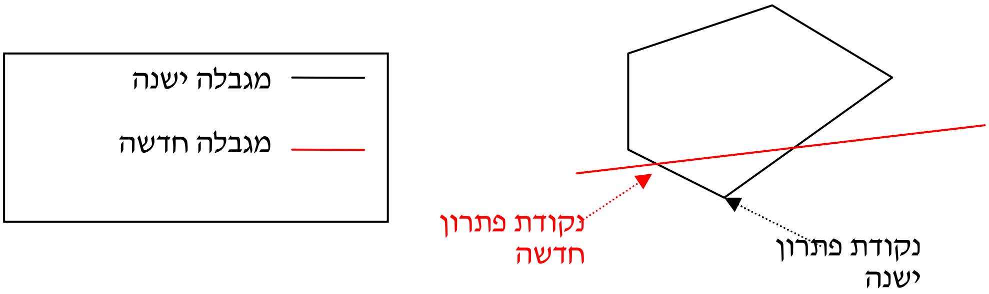
פאה- מימד n-1.
צלע- מימד 1.
נקודה- מימד 0.

הפיאון המוגדר על ידי ה- LP:

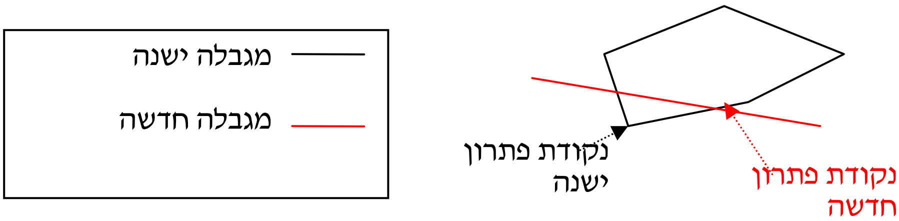
$$p = \{x \in \Re^n / Ax = b, x \geq 0\}$$

נסתכל במקרה הדו מימדי.

שלב I:



שלב II:



ניתן לראות כי נקודות הפתרון מתקבלות בקודקודים.

משפט:
הפתרון האופטימאלי של LP **חסומה** בהצגה סטנדרטית מתקבל בקודקוד.

הסבר אינטואיטיבי:
נניח בשלילה כי קיים פתרון אופטימאלי שאינו מצוי בקודקוד.
אזי הפתרון של ה-LP הוא קבוצה חסומה, ועל כן קיימת סביבה סביב פתרון המוכלת כולה בפתרון ה- LP. בסביבה זו, קיימת נקודה שערך הפתרון שלה טוב מערך הפתרון של הנקודה הנתונה.
בסתירה לכך שהנקודה הנתונה מהווה פתרון אופטימאלי.

<u>אלגוריתם ה- Simplex:</u>

בחר קודקוד $x \in P$. (בדרך שנראה בהמשך).

אם יש קודקוד שכן של x, כך ש-

$$C^t y < C^t x$$

אחרת, x הוא פתרון אופטימאלי. (נראה בהמשך מדוע).

הגדרה:

נקרא לקבוצה B, $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $|B| = m$ בסיס,

אם המטריצה A_B המורכבת מהעמודות של A המתאימים לאינדקסים ב-B

היא מטריצה רגולארית (דרגת A_B היא m.)

פתרון אפשרי בסיסי Basic feasible Solution (= bfs):

$x \in P$ הוא bfs, אם קיים בסיס B כך ש-

$\forall i \notin B, x_i=0.$

$X_{\sim B}= 0$

טענה:

בהינתן בסיס B קיים לכל היותר $x \in P$ יחיד שהוא bfs מתאים:

$Ax= b \rightarrow A_B x_B = b$

טענה:

x הוא bfs אס"ם x הוא קודקוד של הפאון המגדיר את ה- LP.