אלגוריתמים מתקדמים
הרצאה
3/11/05

נושאים של הקורס

1. אלגוריתמי קירוב
2. אלגורתמי on-line
3. קירוב של מרחבים מטריים
4. בעיות על גבול כלכלה וחישוב

אלגוריתמי קירוב

P: בעיות שניתן לחשב בזמן פולינומי.
NP: בעיות שניתן לבדוק פתרון נתון בזמן פולינומי.
NP complete: בעיות ב NP שניתן לעשות מהן רדוקציה לכל בעיה ב NP.

Empirical approach: אלגוריתמים שעובדים לרוב. לא מובטחים עצירה או דיוק.
Average case analysis: עובד תחת הנחה על התפלגות הקלט.
Worst case approximation algorithms: אלגוריתם פולינומי. תמיד נעצר. בעל חסם על הקירוב לפתרון האופטימלי.

בעיות אופטימיזציה

נתון קלט I. לכל פתרון אפשרי מוגדר עלות. עבור אלגוריתם A, נסמן את העלות של הפתרון ב A(I). נסמן ב OPT(I) את מחיר הפתרון האופטימלי.
מינימיזציה: דרוש אלגוריתם A שמוצא פתרון בעל עלות מינימלית.
דוגמאות:

1. בעיית הסוכן הנוסע (TSP)
2. תזמון.

מקסימיזציה: דרוש אלגוריתם A שמוצא פתרון בעל רווח מקסימלי.
דוגמא:
קליקה מקסימלית בגרף.

הגדרה: *אלגוריתם קירוב*
מינימיזציה: לאלגוריתם A יש יחס קירוב α, $\alpha>1$, אם A רץ בזמן פולינומי ולכל קלט I מתקיים:
$A(I) \le \alpha \cdot OPT(I)$.
מקסימיזציה: לאלגוריתם A יש יחס קירוב α, $\alpha<1$, אם A רץ בזמן פולינומי ולכל קלט I מתקיים:
$A(I) \ge \alpha \cdot OPT(I)$.

הגדרה: *יחס קירוב לבעיות מינימיזציה*
ה α המינימלי האפשרי בידי אלגוריתם כלשהו. α יכול להיות פונקציה של גודל הקלט.

Vertex Cover

נתונים גרף $G=(V,E)$ ופונקציית מחיר $c:V\to R^+$.
מצא כיסוי צמתי בעל משקל מינימלי. כלומר, רוצים למצוא קבוצה $V'\subseteq V$ כך שלכל צלע $e=\{u,v\}$ ב E, מתקיים: $u\in V'$ או $v\in V'$, כך ש $\sum_{v\in V'} c(v)$ מינימלי.
הערה: לאלגוריתם החמדן יש יחס קירוב של $\theta(\log(|V|))$.

איך ננתח את יחס הקירוב אם חישוב OPT(I) הוא NP קשה?

עבור בעיות מינימיזציה, ניתן חסם תחתון, LB(I), על המחיר האופטימלי, ונחסום את היחס: A(I)/LB(I).

מאחר ש OPT(I) ≥LB(I), $\frac{A(I)}{OPT(I)} \le \alpha \Leftarrow \frac{A(I)}{LB(I)} \le \alpha$.

הגדרה: *זיווג* בגרף G=(V,E) הוא תת קבוצה $M \subseteq E$, כך שאין זוג קשתות ב M בעלי קדקד משותף.
הגדרה: *זיווג מקסימלי*: זיווג שלא ניתן להוסיף אליו קשת נוספת.

טענה: עבור זיווג מקסימלי כלשהו מתקיים: LB(I)=M(I).
הוכחה: OPT(I) ≥ M(I) כי לכל קשת ב M(I) חייב להיות קדקד בכיסוי.

<u>אלגוריתם קירוב ל V.C</u>
מצא זיווג מקסימלי M והכנס לכיסוי את הקדקדים של הקשתות ב M.
תיאור נוסף: בחר קשת הוסף את 2 קדקדיה לכיסוי. הסר את כל הקשתות שמכוסות על ידן. המשך בתהליך כל עוד נותרו קשתות.

משפט: לאלגוריתם הקירוב ל V.C יש יחס קירוב 2.
הוכחה:
A(I)=2|M(I)| ≤ 2·OPT(I).
כיסוי זה הוא חוקי. אם נניח בשלילה שיש קשת שאינה מכוסה, אז הקדקדים שלה זרים לקשתות ב M(I), וניתן להוסיף אותה ל M(I), בסתירה לכך ש M זיווג מקסימלי.

<u>מספר שאלות:</u>
1. האם יחס קירוב β הוא יחס הקירוב הטוב ביותר עבור אלגוריתם A?
   כלומר, האם קיים קלט I כך שלכל ε>0, A(I)/OPT(I) > β-ε?
   תשובה: כן. דוגמא: גרף דו צדדי. n קדקדים בכל צד. OPT(I)=n. A(I)=2n.
2. האם ניתן להראות "יחס קירוב" β<2 עבור אלגוריתם B ביחס לחסם התחתון שמצאנו?
   כלומר, האם קיים אלגוריתם כלשהו B, כך שלכל I מתקיים B(I)/LB(I) ≤ β < 2?
   תשובה: לא קיים אלגוריתם טוב יותר. דוגמא: הגרף המלא על n קדקדים. n אי-זוגי. OPT(I)=n-1. LB(I)=(n-1)/2. ומכאן ש B(I)/LB(I) ≥OPT(I)/LB(I)=2 .
3. האם יחס הקירוב הוא 2 או קטן מ-2?
   תשובה: יחס הקירוב הוא $2-\frac{1}{\sqrt{n}}$