7. קצב גידול של פונקציות

עיסוק מרכזי במדעי המחשב הוא פיתוח אלגוריתמים לפתרון בעיות שונות. אחד השיקולים החשובים ביותר בתכנון אלגוריתמים הוא יעילותם. יעילותו של אלגוריתם נמדדת על פי מספר הפעולות הבסיסיות שמבוצעות במהלך האלגוריתם (כגון: פעולה חשבונית, השוואת שני מספרים וכדומה). לכן, מטרתנו היא להעריך את הקושי של בעיה חישובית, או את המחיר לפתור אותה בדרך מסוימת. חשוב, בהקשר זה, לספק הערכות שאינן תלויות במאפיינים הספציפיים של המחשב שבו נשתמש לפתרון הבעיה. ברור, שאותו אלגוריתם ידרוש זמני ריצה שונים לחלוטין במחשב אישי או במחשב על. יחד עם זאת, זו הנחה סבירה למדי שבהשוואה כזו, היחס בין זמני ריצה על מחשבים שונים הוא גודל קבוע, פחות או יותר. היחס הזה תלוי בגורמים כמו קצב הפעימה של השעונים במחשבים השונים, זמן הגישה לזיכרון וכדומה. לעומת זאת, מספר הפעולות הכולל תלוי בעיקר באלגוריתם ולא במחשב שעליו הוא ממומש. שיקול מרכזי נוסף הוא שאיננו מסתפקים בהערכת זמן הריצה לקלט בודד. נחוצה לנו לרוב הערכה לזמן הריצה של האלגוריתם שתלויה בראש ובראשונה בגודל הקלט. גם כאן אין לנו עניין בטיפול בגדלים ספציפיים של קלט, אלא בהבנת התמונה הכללית. למשל, אם עוברים מקלט אחד לקלט אחר, ארוך כפליים מהראשון, מה השינוי הצפוי בזמן הריצה? המסגרת הפורמלית שבה נדונות שאלות אלה היא התורה **האסימפטוטית** של סיבוכיות הזמן. בפרק זה נספק את מושגי היסוד שיאפשרו לנו דיון בשאלות אלה ואחרות. נוהגים אם כן, למדוד את היעילות האסימפטוטית של האלגוריתם, כלומר מה מספר הפעולות המבוצעות במהלך האלגוריתם כפונקציה של גודל הקלט, כאשר גודל הקלט שואף לאינסוף. אלגוריתם שהוא אסימפטוטית יעיל יותר, יתורגם לרוב לתוכנית מחשב שתרוץ מהר יותר לכל קלט, פרט אולי לקלטים קטנים במיוחד.

נתבונן לדוגמה באחת הבעיות הבסיסיות של מדעי המחשב – מיון של n מספרים בסדר עולה. נבחן שני אלגוריתמים ידועים לפתרון הבעיה - מיון "מיזוג" (MergeSort) ומיון "בועות" (BubbleSort). נריץ את מיון בועות על מחשב על ואילו את מיון מיזוג על מחשב אישי. לכאורה נראה שמיון בועות יסיים את פעולתו מהר יותר כי אנחנו מריצים אותו על מחשב חזק יותר. אולם אם נבחן את זמן הריצה של שני האלגוריתמים על קלט הכולל מיליון מספרים, נגלה, כפי שמפורט בטבלה להלן, כי מיון מיזוג יקדים בהרבה את מיון בועות. המחשב האישי מיין את מיליון המספרים בזמן קצר פי 20 מזה של מחשב העל!

אלגוריתם	מספר הפעולות של האלגוריתם	סוג מחשב	מספר פעולות לשנייה	זמן ריצה בשניות
מיון מיזוג	$50n\log_2 n$	מחשב אישי	מיליון	$\frac{50\cdot 10^6 \log_2 10^6}{10^6} \cong 1000$
מיון בועות	$2n^2$	מחשב על	100 מיליון	$\frac{2\cdot\left(10^6\right)^2}{10^8} = 20,000$

הסיבה לכך היא שמספר הפעולות שמבצע מיון מיזוג כפונקציה של n הוא אסימפטוטית קטן מזה של מיון בועות. שימו לב שהקבוע 50 במספר $50n\log_2 n$ גדול בהרבה מהקבוע 2 במספר $2n^2$, אולם גם לכך אין השפעה רבה על קלט גדול דיו. הסיבה היא שוב שקצב הגידול האסימפטוטי של הפונקציה $n\log_2 n$ קטן מזה של הפונקציה n^2, כתלות ב- n. ייתכן בהחלט שמיון בועות יהיה מהיר יותר במיון קלט הכולל מספר קטן של מספרים, אולם הדאגה העיקרית של מתכנני האלגוריתמים היא לרוב התנהגות האלגוריתם על קלט גדול.

כדאי להצביע גם על הקשר בין השאלות הנדונות כאן לנושא בסיסי בחשבון אינפיניטסימלי והוא מושג הגבול. הקוראים יודעים אולי מלימודיהם עובדות כגון $\lim_{n\to\infty} n^2 - 3n = \infty$ או $\lim_{n\to\infty} n^5 - 7n^3 + 19 = \infty$. כלומר, שתי הפונקציות $f(n) = n^2 - 3n$ ו- $g(n) = n^5 - 7n^3 + 19$ שואפות לאינסוף כאשר $n\to\infty$. שאלה אופיינית שאנו שואלים כאן היא, האם ניתן להשוות באופן מדויק בין קצב השאיפה לאינסוף של שתי הפונקציות האלה? (בהקשר שתואר קודם, עשויות הפונקציות f,g לתאר את סיבוכיות הזמן של שני אלגוריתמים. ההשוואה בין קצבי הגידול שקולה בהקשר זה לשאלה איזה אלגוריתם עדיף אם מדובר באורכי קלט n גדולים). ואכן, אין קושי לענות על שאלה זו, מפני ש- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3n}{n^5 - 7n^3 + 19} = 0$. כלומר, אף כי f,g שתיהן שואפות ל- ∞, קצב הגידול של g עולה בהרבה על זה של f.

בפרק זה נפתח את הכלים המתמטיים הדרושים להשוואה אסימפטוטית של פונקציות שונות. מכיוון שאנו עוסקים כאן במתמטיקה בדידה, נדון בעיקר בפונקציות שתחום ההגדרה שלהן הוא קבוצת המספרים הטבעיים. הנה דוגמה של מספר פונקציות ושל הערכים שהן מקבלות בכמה מספרים n. שימו לב להבדל בקצב הגידול של הפונקציות $\log_2 n$ ו- 2^n כאשר n הולך וגדל!

n	$f(n) = \log_2 n$	$f(n) = 3n$	$f(n) = n^2$	$f(n) = 2^n$
2	1	6	4	4
4	2	12	16	16
8	3	24	64	256
16	4	48	256	65,536
32	5	96	1024	4,294,967,296
64	6	192	4096	18,446,744,073,709,551,616

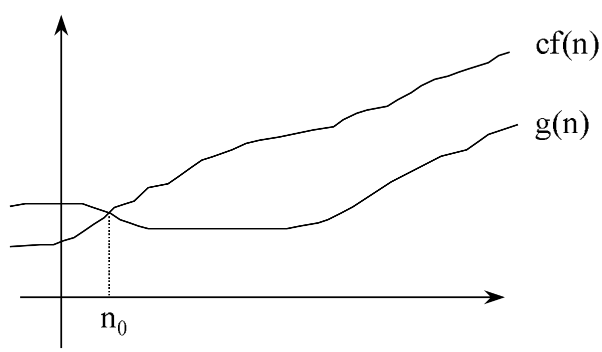
7.1. סדר גודל של פונקציות

הנושאים שיוצגו: *קצב גידול אסימפטוטי, O, Ω, Θ, משפחות של פונקציות, פונקציה פולינומית, פונקציה מעריכית, פונקציה פולילוגריתמית, o קטן.*

נפתח פרק זה בשלוש הגדרות המאפשרות להשוות בין פונקציות. כאמור, נרצה להשוות את קצב הגידול האסימפטוטי של הפונקציות, ולא את ערכיהן המדויקים. בהינתן שתי פונקציות f,g נרצה לדעת האם $f \le g$, $f \ge g$ או $f = g$, כאשר לא מדובר כאן במובן הרגיל של השוואת מספרים, אלא בהשוואה אסימפטוטית.

הגדרה 7.1.1: יהיו $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ שתי פונקציות. נאמר שהפונקציה g היא **O גדול** של f, ונסמן זאת על ידי $g = O(f)$, אם קיימים קבועים $c,\ n_0 > 0$ כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $g(n) \le c\cdot f(n)$.

הגדרה זו אומרת שהפונקציה g קטנה או שווה אסימפטוטית לפונקציה f, כפי שאפשר לראות גם בתרשים 7.1.1.



תרשים 7.1.1: $g = O(f)$.

נעיר מספר הערות על ההגדרה, ונפתח בתפקידו של הקבוע n_0. התנהגות הפונקציות f,g בערכים קטנים של n, אין בה כדי להשפיע על ההשוואה האסימפטוטית בין הפונקציות. בפרט, גם אם $g(n) > f(n)$ לערכים קטנים של n, עדיין אין בכך למנוע את האפשרות ש- $g = O(f)$ כאשר מגבילים את הדיון לערכי n הגדולים מ- n_0. כלומר, הדבר החשוב כאן הוא שהחל ממספר מסוים n_0 מתקיים $g(n) \le c{\cdot}f(n)$.

מהו תפקידו של c? ההגדרה מנסה גם לתפוס את האינטואיציה הבאה: אם f גדולה אסימפטוטית מ- g, אז גם $c{\cdot}f$ גדולה אסימפטוטית מ- g, לכל קבוע $c > 0$. את מקורות הרעיון הזה קל לראות גם בדוגמאות שראינו בהקדמה לפרק זה. הדוגמה שעסקה במיון n מספרים ממחישה מדוע אמרנו שהפונקציה $g(n) = 50n\log n$ קטנה אסימפטוטית מהפונקציה $f(n) = 2n^2$. בסימונים החדשים $g = O(f)$, שהרי הפונקציה $n\log n$ קטנה אסימפטוטית מהפונקציה n^2, בלי קשר לקבועים $50,2$. לרוב נרשום את העובדה ש- $g = O(f)$ ישירות כ- $50n\log n = O(2n^2)$.

הדיון בגבולות מוליך לאותה תוצאה:

כשם ש- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 - 7n^3 + 19}{n^2 - 3n} = \infty$, כך גם $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1000}(n^5 - 7n^3 + 19)}{n^2 - 3n} = \infty$.

הכפלת המונה בקבוע החיובי הקטן $\frac{1}{1000}$, לא שינתה את העובדה שהמונה גדול אסימפטוטית מהמכנה. בסימונים החדשים שלמדנו נסמן זאת על ידי:

$$n^2 - 3n = O\left(\frac{1}{1000}(n^5 - 7n^3 + 19)\right).$$

דוגמה 7.1.2: תהיינה $f(n) = n^4,\ g(n) = 3n^3$. אנו טוענים כי $g = O(f)$, או בקיצור נרשום $3n^3 = O(n^4)$. ואכן, אם נבחר את הקבועים $c = 3,\ n_0 = 1$ אז לכל $n \ge n_0 = 1$ מתקיים $3n^3 \le 3n^4$. שימו לב שהבחירה של הקבועים הנ"ל אינה יחידה. גם הבחירה $c = 2,\ n_0 = 2$ תעבוד, שכן אם $n \ge 2$ אז $3n^3 \le 2n^4$ (בדקו!).

בדוגמה האחרונה ראינו שייתכנו כמה בחירות של קבועים c,n_0 המוכיחות כי $g = O(f)$. למעשה זהו המצב באופן כללי: אם $g = O(f)$, אז לכל n_0 קיים קבוע c מתאים (ראו גם תרגיל 3 בסעיף זה).

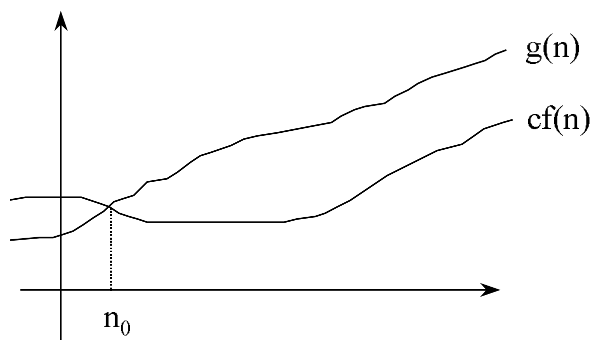
דוגמה 7.1.3: תהיינה $f(n) = n^2,\ g(n) = (n+1)^2$. נשים לב שעבור $c = 4,\ n_0 = 1$ מתקיים $(n+1)^2 \le cn^2$ לכל $n \ge n_0$ (הוכיחו). לכן $g = O(f)$. שימו לב שגם $f = O(g)$ (הוכיחו זאת על ידי כך שתראו זוג קבועים c,n_0 מתאימים).

דוגמה 7.1.4: תהיינה שוב $f(n) = n^4,\ g(n) = 3n^3$. כפי שראינו מתקיים $g = O(f)$. האם גם $f = O(g)$? התשובה שלילית, כי לא קיימים קבועים חיוביים c,n_0, כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $f(n) \le cg(n)$. כדי להוכיח זאת, נניח בשלילה שקיימים קבועים כאלה $c,n_0 > 0$. לכן, לכל $n \ge n_0$ מתקיים $f(n) \le cg(n)$. כלומר, לכל $n \ge n_0$ מתקיים $n^4 \le c{\cdot}3n^3$, או $n \le 3c$. אולם האי-שוויון הזה אינו יכול להיות נכון לכל $n \ge n_0$ כאשר c קבוע, וזאת מכיוון ש- n שואף לאינסוף ואילו c נשאר

קבוע. בפרט, האי-שוויון הזה כמובן אינו נכון כאשר $n > 3c$. קיבלנו לכן **סתירה**, ולכן אין זה נכון ש- $f = O(g)$.

היחס $g = O(f)$ אומר אם כן ש- "g אינה גדולה אסימפטוטית מ- f". באותו אופן דרוש לנו גם סימון לכך שהפונקציה "g אינה קטנה אסימפטוטית מ- f".

הגדרה 7.1.5: יהיו $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ שתי פונקציות. נאמר שהפונקציה g היא **אומגה** של f, ונסמן זאת על ידי $g = \Omega(f)$, אם קיימים קבועים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $g(n) \geq c{\cdot}f(n)$.



תרשים 7.1.2: $g = \Omega(f)$.

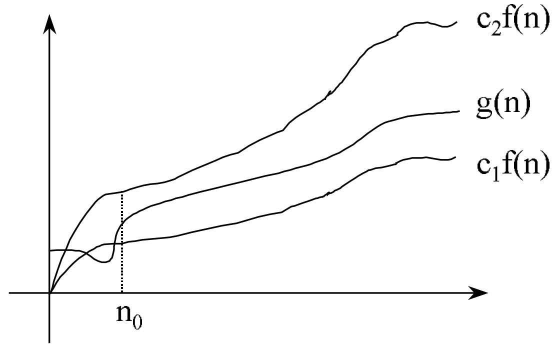
דוגמה 7.1.6: תהיינה $g(n) = n^3+2n^2$, $f(n) = n^3$. אז עבור $c = 1$, $n_0 = 1$ מתקיים $n^3+2n^2 \geq cn^3$ לכל $n \geq n_0$. לכן $g = \Omega(f)$. שימו לב שגם $f = \Omega(g)$.

דוגמה 7.1.7: תהיינה $g(n) = n^3+2n^2$, $f(n) = n^2$. מתקיים $g = \Omega(f)$. אולם לא מתקיים $f = \Omega(g)$. ההוכחה היא שוב בדרך השלילה (נסו!).

דוגמה 7.1.8: האם $2^n = \Omega(2^{2n})$? התשובה שלילית. נניח בשלילה שכן. דהיינו, קיימים קבועים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $2^n \geq c{\cdot}2^{2n}$. נחלק את שני האגפים ב- 2^n ונקבל $1 \geq c2^n$, כלומר $c \leq 1/2^n$ וזאת לכל $n \geq n_0$. אולם זה לא ייתכן כיוון ש- c הוא קבוע חיובי. **סתירה**.

לאחר שפיתחנו את המושגים ל"גדול או שווה אסימפטוטית" ו"קטן או שווה אסימפטוטית", נדרש גם המושג "שווה אסימפטוטית". בכך עוסקת ההגדרה הבאה.

הגדרה 7.1.9: יהיו $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ שתי פונקציות. נאמר שהפונקציה g היא **תטה** של f, ונסמן זאת על ידי $g = \Theta(f)$, אם קיימים קבועים $c_1, c_2, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $c_1f(n) \leq g(n) \leq c_2f(n)$.



תרשים 7.1.3: $g = \Theta(f)$.

דוגמה 7.1.10: תהיינה $g(n) = n^3+2n^2$, $f(n) = n^3$. אם נבחר את הקבועים $c_1 = 1, c_2 = 3, n_0 = 1$, אז לכל $n \ge n_0$ מתקיים $c_1n^3 \le n^3+2n^2 \le c_2n^3$. ולכן $g = \Theta(f)$.

דוגמה 7.1.11: נתבונן בפונקציות $f(n) = 2^{2n}$, $g(n) = 2^n$. אמנם $2^n = O(2^{2n})$, כי $2^n \le 2^{2n}$ לכל n טבעי. אולם $2^n \ne \Omega(2^{2n})$ כפי שהוכחנו בדוגמה 7.1.8, ולכן $2^n \ne \Theta(2^{2n})$.
כלומר, אף כי $n = \Theta(2n)$, השוויון האסימפטוטי הזה אינו נשמר במעבר לפונקציה מעריכית של n. דוגמה זו מבהירה היטב את הזהירות הדרושה כשמדובר בהערכת סדרי גודל של פונקציות.

דוגמה 7.1.12: נתבונן בפונקציה הקבועה $g(n) = 1$ לכל $n \ge 0$, ותהי $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. אז $f = \Theta(g)$, או בקיצור נכתוב $f = \Theta(1)$, אם ורק אם ערכי הפונקציה f חסומים. כלומר, קיימים קבועים $n_0,c_1,c_2 > 0$ כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $c_1 \le f(n) \le c_2$. למשל, הפונקציה הקבועה $f(n) = 3$ מקיימת $f = \Theta(1)$. כך גם הפונקציה $h(n) = 1+ 1/n$ מקיימת $h = \Theta(1)$, כי $1 \le 1 + 1/n \le 2$ לכל $n \ge 1$.

דוגמה 7.1.13: נראה כי $\log_3 n = \Theta(\log_2 n)$. ואכן מתקיים $\log_3 n = \dfrac{\log_2 n}{\log_2 3}$. לכן, אם נבחר את הקבועים $c_1 = c_2 = \dfrac{1}{\log_2 3}$ ו- $n_0 = 1$, אז $c_1\cdot\log_2 n = \log_3 n = c_2\cdot\log_2 n$ לכל $n \ge n_0$. ואמנם, בסיס הלוגריתם אינו חשוב כשמדובר בסדרי גודל כל עוד הוא קבוע (ראו תרגיל 4).

כפי שהערנו לעיל, היחסים O, Ω, Θ מקיימים תכונות רבות הדומות לתכונותיהם של היחסים $\le, \ge, =$.

משפט 7.1.14: תהיינה $f,g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ שתי פונקציות. אז $g = \Theta(f)$ אם ורק אם $g = O(f)$ וגם $g = \Omega(f)$.
הוכחה: נובעת ישירות מההגדרות. □

משפט 7.1.15: תהיינה $f,g,h:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^{+}$ פונקציות כלשהן. אז מתקיים:

1. טרנזיטיביות: אם $g = O(f)$ וגם $f = O(h)$ אז $g = O(h)$.
   אם $g = \Omega(f)$ וגם $f = \Omega(h)$ אז $g = \Omega(h)$.
   אם $g = \Theta(f)$ וגם $f = \Theta(h)$ אז $g = \Theta(h)$.
2. רפלקסיביות: $f = \Theta(f)$ ובפרט $f = O(f)$, $f = \Omega(f)$.
3. סימטריות: $g = \Theta(f)$ אם ורק אם $f = \Theta(g)$.
4. אנטי-סימטריות: $g = O(f)$ אם ורק אם $f = \Omega(g)$.

הוכחה: נובעת ישירות מההגדרות. □

מהמשפט האחרון ניתן לראות שהיחס Θ הוא יחס שקילות, ואילו היחסים O,Ω הם יחסי סדר. היחס Θ מחלק את עולם הפונקציות למחלקות של פונקציות השוות בסדר גודל. היחסים הנ"ל מאפשרים לנו להגדיר עוד מחלקות חשובות של פונקציות על פי קצבי הגידול שלהן.

משפחות של פונקציות

אומרים שהפונקציה f:

- **חסומה פולינומית** אם קיים קבוע $k > 0$ כך ש- $f(n) = O(n^k)$.
- **פולינומית** אם קיים קבוע $k > 0$ כך ש- $f(n) = \Theta(n^k)$.
- **גדלה מעריכית** אם קיים קבוע $a > 1$ כך ש- $f(n) = \Omega(a^n)$.
- **מעריכית** אם קיים קבוע $a > 1$ כך ש- $f(n) = \Theta(a^n)$.
- **יורדת מעריכית** אם קיים קבוע $a < 1$ כך ש- $f(n) = O(a^n)$.
- **חסומה פולילוגריתמית** אם קיים קבוע $k > 0$ כך ש- $f(n) = O((\log n)^k)$.
- **סופר-פולינומית** ("גדלה מהר יותר מכל פולינום") אם אין קבוע $k > 0$ כך ש- $f(n) = O(n^k)$.
- **תת-מעריכית** אם אין קבוע $a > 1$ כך ש- $f(n) = \Omega(a^n)$.

כך למשל, הפונקציה $f(n) = n^{\log n}$ היא סופר-פולינומית אולם אינה מעריכית. הפונקציה $f(n) = \frac{1}{2^n}$ יורדת מעריכית, ואילו הפונקציה $f(n) = n^3 + 3\log n$ היא פולינומית.

סכום ומכפלה של מספר קבוע של פונקציות

יהיו h_1,h_2 שתי פונקציות חיוביות כלשהן. מהו הסדר גודל של סכומן? נשים לב תחילה שאם a,b שני מספרים חיוביים, אז סכומם $a+b$ "שווה בערך" למספר הגדול מבין השניים. וביתר דיוק:

$$\max(a,b) \le a + b \le 2\cdot\max(a,b),$$

שכן אם למשל $a \ge b \ge 0$ אז $a \le a + b \le 2a$. אבחנה פשוטה זו מאפשרת לנו להעריך את סדר הגודל של סכומן של שתי פונקציות. במשפט הבא נראה כיצד מתנהג יחס הסדר O כאשר מחברים או מכפילים שתי פונקציות (ביחס Ω יעסוק תרגיל 2 בסעיף זה).

משפט 7.1.16: תהיינה $f_1,f_2,g_1,g_2:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ פונקציות כלשהן, כך ש- $g_1 = O(f_1),\ g_2 = O(f_2)$.
אז:
1. $g_1 + g_2 = O(\max(f_1,f_2))$.
2. $g_1\cdot g_2 = O(f_1\cdot f_2)$.

הוכחה: נוכיח תחילה את סעיף 1. לפי ההנחה קיימים קבועים $c_1,n_1 > 0$ כך שלכל $n \ge n_1$ מתקיים $g_1(n) \le c_1f_1(n)$. כך, גם קיימים קבועים $c_2,n_2 > 0$ כך שלכל $n \ge n_2$ מתקיים $g_2(n) \le c_2f_2(n)$. יהי $n_0 = \max(n_1,n_2)$. לכן, לכל $n \ge n_0$:

$$g_1(n) + g_2(n) \le c_1f_1(n) + c_2f_2(n) \le (c_1+c_2)\max(f_1(n),f_2(n)).$$

הטענה מוכחת אם כן עם הבחירה $n_0 = \max(n_1,n_2)$ והקבוע $c = c_1+c_2$.

נעבור כעת לסעיף 2. גם כאן קיימים קבועים $c_1,n_1 > 0$ כך שלכל $n \ge n_1$ מתקיים $g_1(n) \le c_1f_1(n)$. כך, גם קיימים קבועים $c_2,n_2 > 0$ כך שלכל $n \ge n_2$ מתקיים $g_2(n) \le c_2f_2(n)$. יהי שוב, $n_0 = \max(n_1,n_2)$. לכן, לכל $n \ge n_0$:

$$g_1(n)\cdot g_2(n) \le c_1f_1(n)\cdot c_2f_2(n) = (c_1\cdot c_2)\ f_1(n)\cdot f_2(n).$$

הטענה מוכחת עבור n_0 הנ"ל והקבוע $c = c_1\cdot c_2$. □

דוגמה 7.1.17: תהיינה $f(n) = n^3,\ g(n) = n^2,\ h(n) = \log_2 n$. על ידי שימוש במשפט האחרון (למעשה בהרחבה שלו ל- 3 פונקציות) אפשר להראות ש- $n^3 + n^2 + \log_2 n = O(n^3)$.

בדוגמה האחרונה השתמשנו במשפט 7.1.16. המשפט תקף גם לכל מספר **קבוע** של מחוברים. במקרים שבהם מחברים מספר לא קבוע (משתנה) של פונקציות המשפט אינו תקף, והשימוש בו עלול להוביל למסקנות שגויות. למשל, אף כי $5n + 7 = O(n)$, **אין** זה נכון כי:

$$\underbrace{(5n+7)+(5n+7)+\ldots+(5n+7)}_{\log n} = O(n).$$

למען האמת,

$$\underbrace{(5n+7)+(5n+7)+\ldots+(5n+7)}_{\log n} = \Theta(n\log n)$$

(הוכיחו זאת). בסעיף הבא נדון בהרחבה בשיטות להערכת סדר הגודל של סכומן של מספר כלשהו של פונקציות.

כפי שראינו היחסים O,Ω מתאימים במובנים רבים ליחסים $\le, \ge$ על המספרים הממשיים. מה בדבר היחסים $<, >$ ("קטן ממש" ו"גדול ממש")? נתבונן בהגדרה הבאה.

הגדרה 7.1.18: יהיו $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ שתי פונקציות. נאמר שהפונקציה g היא **o קטן** של f, ונסמן זאת על ידי $g = o(f)$, אם לכל $\varepsilon > 0$ (חיובי וקטן כרצוננו) קיים קבוע $n_0 > 0$ כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $g(n) \le \varepsilon\cdot f(n)$.

לקוראים שכבר למדו את מושג הגבול בחשבון דיפרנציאלי נזכיר שהתנאי שהוצג בהגדרה האחרונה שקול לתנאי $\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = 0$, כלומר g קטנה ממש אסימפטוטית מ- f.

דוגמה 7.1.19: תהיינה $g(n) = 2n^2+n,\ f(n) = 5n^3-8n$. אז מתקיים $g = o(f)$ (הוכיחו זאת).

תרגילים

1. דרגו את הפונקציות הבאות על פי סדר גודל מהקטנה לגדולה (במונחים של O גדול):

$$1.8^n \qquad 2^n \qquad \sqrt{n} \qquad \log n \qquad \log(\log n) \qquad \frac{n}{\log n} \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$n\log n \qquad n^{\log n} \qquad 32 \qquad \log^2 n \qquad n^4 \qquad 10^{\log n}$$

כל הלוגריתמים הם בבסיס 2.
הוכיחו תשובותיכם! כלומר עבור כל זוג פונקציות $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ שעבורן אתם טוענים ש- $g(n) = O(f(n))$, הוכיחו שהדבר אכן כך על פי הגדרת O.

2. תהיינה $f_1,f_2,g_1,g_2:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ פונקציות כלשהן, כך ש- $g_1 = \Omega(f_1),\ g_2 = \Omega(f_2)$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   א. $g_1 + g_2 = \Omega(\max\{f_1,f_2\})$.
   ב. $g_1\cdot g_2 = \Omega(f_1\cdot f_2)$.

3. הוכיחו שהקבוע n_0 אינו חיוני בהגדרה של O גדול. הוכיחו שבמידה שהפונקציות אינן מתאפסות ההגדרה הבאה שקולה: יהיו $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ שתי פונקציות חיוביות ממש. נאמר שהפונקציה g היא **O גדול** של f, ונסמן זאת על ידי $g = O(f)$, אם קיים קבוע $c > 0$ כך שלכל $n \ge 0$ מתקיים $g(n) \le c\cdot f(n)$.

4. א. הוכיחו כי $\log_a n = \Theta(\log_b n)$ לכל שני קבועים $a,b > 1$.
   ב. האם גם $2^{\log_a n} = \Theta\left(2^{\log_b n}\right)$ לכל שני קבועים $a,b > 1$?

5. א. הוכיחו כי $\log(n+1) - \log n = O(1)$.
   ב. שפרו את החסם והוכיחו כי $\log(n+1) - \log n = O(1/n)$.
   ג. הוכיחו יתר על כן כי $\log(n+1) - \log n = \Theta(1/n)$.

6. בטאו באמצעות גבולות מה פירוש הדבר ש- $f(n) = (1+o(1))g(n)$.

7. הוכיחו כי $\frac{n}{2}\log\left(\frac{n}{2}\right)=\Omega(n\log n)$ כאשר בסיס הלוגריתם הוא 2. האם תשובתכם משתנה כשמשנים את בסיס הלוגריתם?

8. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   א. $n^{1/3} = O(n^{1/4})$.
   ב. $a\cdot n^k = \Theta(b\cdot n^k)$, כאשר a,b,k קבועים חיוביים כלשהם.
   ג. $n! = O(n^n)$, כאשר כזכור $n! = 1\cdot 2\cdots n$.
   ד. $2^n = O(n!)$.

9. תנו דוגמה לפונקציה f שהיא o קטן של n^{ε} לכל $\varepsilon > 0$, אך אינה חסומה פולילוגריתמית.

10. מי מהתנאים הבאים גורר את האחר:
   א. $f(n) = \Theta(\log n)$.
   ב. $f(n) = (1+ o(1))g(n)$.

   מה תוכלו לומר אם מניחים בנוסף ש- $f(n), g(n) \to \infty$ כאשר $n \to \infty$.

11. ראינו שיחס השקילות Θ אינו נשמר במעבר לפונקציה מעריכית (ראו דוגמה 7.1.11). בתרגיל זה תתבקשו לברר אם היחס הזה נשמר במעבר ללוגריתם. תהיינה $f, g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ שתי פונקציות כך ש- $f(n), g(n) \to \infty$ כאשר $n \to \infty$, וכן $f = \Theta(g)$.
   א. האם $\log f(n) = \Theta(\log g(n))$?
   ב. האם $\log f(n) = (1+o(1))\log g(n)$?

7.2. הערכת סדר גודל של טורים

הנושאים שיוצגו: *תכונת הליניאריות, חסם תחתון ועליון לטור, קירוב טור על ידי אינטגרל, הערכת $n!$, הטור ההרמוני, נוסחת סטירלינג.*

כפי שהערנו בסעיף הקודם, כאשר ידוע לנו סדר הגודל של פונקציה או מספר קבוע של פונקציות, אין קושי לברר את סדר הגודל של סכומן או מכפלתן. כיצד נטפל במצב שבו עלינו לחבר מספר לא קבוע של פונקציות? למשל, נניח שברצוננו להעריך את זמן הריצה של אלגוריתם כלשהו. כפי שקורה לעתים מזומנות, האלגוריתם כולל לולאה, היינו קטע חישובי שחוזרים עליו מספר לאו דווקא קבוע של פעמים. גם אם נדע להעריך את זמן הריצה של מהלך אחד של הלולאה, בפועל תתבצע הלולאה מספר לא קבוע של פעמים, כל פעם עם גודל קלט אחר. כלומר עלינו להעריך את סכום זמני הריצה של כל ביצוע של הלולאה. בבעיה זו ודומותיה נטפל בסעיף זה.
חשוב לומר ששאלות מסוג זה עלולות להיות קשות ואין מתכון כללי לפתרונן. אנו נציג מספר שיטות יעילות לפתרון שאלות העוסקות בהערכת סדרי גודל של טורים.

ברור שאם מדובר בטור חשבוני או גיאומטרי, ניתן להשתמש בנוסחאות המוכרות לכם, ולחשב את ערכו המדויק של הטור. נזכיר נוסחאות אלה ללא הוכחה.

משפט 7.2.1 (טור חשבוני): יהיו $a,d \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$. אז:

$$a+(a+d)+\ldots+(a+(n-1)d)=\frac{n}{2}(2a+d(n-1)).$$

בפרט כש- $a = d = 1$, $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

משפט 7.2.2 (טור גיאומטרי): יהי $x \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$.

- אם $x \neq 1$, אז $1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.
- אם $|x| < 1$, אז $\sum_{i=0}^{\infty} x^i=\frac{1}{1-x}$.

משפט 7.2.3 (תכונת הליניאריות): תהיינה $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ פונקציות חיוביות ממש כך ש- $g=\Theta(f)$. אז $\sum_{i=1}^{n} g(i)=\Theta\left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\right)$.

הוכחה: לפי תרגיל 3 בסעיף 7.1, אם f,g חיוביות ממש אז אין צורך ב- n_0 שבהגדרת $g = \Theta(f)$. דהיינו, יש שני קבועים חיוביים $c_1,c_2 > 0$ כך שלכל i טבעי מתקיים $c_1f(i) \le g(i) \le c_2f(i)$. נסכם על פני $1 \le i \le n$ ונקבל:

$$c_1\sum_{i=1}^{n} f(i)=\sum_{i=1}^{n} c_1f(i)\le\sum_{i=1}^{n} g(i)\le\sum_{i=1}^{n} c_2f(i)=c_2\sum_{i=1}^{n} f(i)$$

לכל n טבעי. כלומר $\sum_{i=1}^{n} g(i)=\Theta\left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\right)$ כפי שטענו. □

דוגמה 7.2.4: נראה ש- $\sum_{i=1}^{n}(3i+\log i)=\Theta\left(n^2\right)$. קל לבדוק ש- $3i + \log i = \Theta(i)$, וכפי שהערנו $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}=\Theta\left(n^2\right)$. לכן, על ידי שימוש במשפט 7.2.3 נקבל:

$$\sum_{i=1}^{n}(3i+\log i)=\Theta\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)=\Theta\left(n^2\right)$$

מציאת חסם עליון ותחתון הדוקים לטור

לעתים קל למצוא את ערכו האסימפטוטי של טור במונחים של Θ, אם מצליחים לחסום אותו מלמעלה ולמטה במונחים של O ו- Ω. אם נתון לנו הטור $\sum_{i=1}^{n} a_i$ שאותו ברצוננו להעריך, כאשר $a_1,\ldots,a_n \ge 0$, וידוע לנו כי:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \Omega(f) \qquad , \sum_{i=1}^{n} a_i = O(g)$$

וגם ש- $f = \Theta(g)$, נוכל לסכם ולומר כי $\sum_{i=1}^{n} a_i = \Theta(f)$. אולם כיצד נחסום את הטור מלמעלה ומלמטה בצורה טובה? לעתים, אם איברי הטור אינם משתנים מהר מדי, מספיק לחסום את הטור מלמעלה (או מלמטה) על ידי מציאת האיבר המקסימלי (המינימלי) של הטור, והכפלתו במספר איברי הטור. כלומר, אם $a_1,\ldots,a_n \geq 0$ אז:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n \cdot a_{min} \quad \text{ואילו} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \leq n \cdot a_{max}$$

כאשר a_{max} הוא האיבר המקסימלי ו- a_{min} הוא האיבר המינימלי מבין $a_1,a_2,\ldots,a_n$.

דוגמה 7.2.5: נעריך את הסכום $\sum_{i=1}^{n}(2n+i)$. אמנם, ניתן לחשב במדויק את ערכו של הטור הזה על ידי שימוש בנוסחה לחישוב טור חשבוני, אולם אנו נתעניין רק בהערכת סדר הגודל של הטור. נעריך את ערכו של הטור הזה בשיטה שתיארנו זה עתה. המחובר הקטן ביותר מבין איברי הטור $\sum_{i=1}^{n}(2n+i)$ הוא הראשון $2n+1$. המחובר הגדול ביותר הוא האחרון $2n + n = 3n$. לכן:

$$\sum_{i=1}^{n}(2n+i) \leq n \cdot 3n = 3n^2 = O(n^2)$$

ואילו,

$$\sum_{i=1}^{n}(2n+i) \geq n \cdot (2n+1) = 2n^2 + n = \Omega(n^2)$$

יוצא אם כן כי:

$$\sum_{i=1}^{n}(2n+i) = \Theta(n^2)$$

(הרי קיבלנו חסם עליון ותחתון ששניהם n^2).

את הדוגמה האחרונה ניתן היה לפתור גם באמצעות הנוסחה לחישוב טור חשבוני, אך מה נוכל לומר על הדוגמה הבאה?

דוגמה 7.2.6: נחשב את ערכו של הטור $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{n^2 - i}$. במקרה זה לא קשה לראות שהמחוברים הולכים וקטנים ככל ש- i גדל. המחובר הראשון $\sqrt{n^2-1}$ הוא לכן הגדול ביותר, ואילו המחובר האחרון $\sqrt{n^2-n}$ הוא הקטן ביותר. מכאן:

$$n \cdot \sqrt{n^2 - n} \le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n^2 - i} \le n \cdot \sqrt{n^2 - 1}$$

מכיוון ש- $\sqrt{n^2 - 1} = O(n)$ וגם $\sqrt{n^2 - n} = \Omega(n)$ (הוכיחו), נקבל כי:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{n^2 - i} = \Theta(n^2).$$

כמובן, אין כל ייחוד בכך שתחום הסכימה הוא $1 \le i \le n$. די שנדע מהו מספר המחוברים המשתתפים בטור. כך למשל, נוכל לחשב בקלות את ערכו האסימפטוטי של הטור הבא.

דוגמה 7.2.7: נראה ש- $\sum_{i=n}^{2n} (n^5 + 6i^2)^{1/4} = \Theta(n^{9/4})$. ואכן, מספר המחוברים הוא $2n - n + 1 = n + 1$, וסדר הגודל של כל מחובר הוא $\Theta(n^{5/4})$. הרי האיבר המקסימלי הוא $(n^5 + 6\cdot(2n)^2)^{1/4} = O(n^{5/4})$ ואילו המחובר המינימלי הוא $(n^5 + 6n^2)^{1/4} = \Omega(n^{5/4})$.

אולם יש מקרים שבהם שיטה זו איננה נותנת הערכה מדויקת לסדר הגודל של הטור, כיוון שנותר פער בין החסם העליון והתחתון המתקבלים. במקרים כאלה כדאי לעתים לפצל את הסכום לכמה חלקים ולהעריך כל חלק בעזרת השיטה הקודמת. כלומר מחלקים את הטור לשני טורים (או יותר) וחוסמים כל טור בנפרד:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$$ כאשר $1 \le k < n$.

דוגמה 7.2.8: נחזור לטור החשבוני $\sum_{i=1}^{n} i$. קל לחסום אותו מלמעלה, כי המחובר הגדול ביותר הוא n, ולכן:

$$\sum_{i=1}^{n} i \le n \cdot n = n^2 = O(n^2)$$

אולם אם ננסה באותה שיטה לחסום את הטור מלמטה נקבל:

$$\sum_{i=1}^{n} i \ge 1 \cdot n = n = \Omega(n)$$

(המחובר הקטן ביותר הוא 1). קיבלנו פער אסימפטוטי בין החסם העליון לחסם התחתון. מהו אם כן ערכו האסימפטוטי המדויק של הטור, ואולי הערך המדויק נמצא בין החסם העליון לתחתון? במקרה זה (כפי שקל לראות גם על ידי סיכום הטור החשבוני הזה), החסם העליון הוא המדויק, מפני ש:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n/2} i + \sum_{i=n/2+1}^{n} i \ge \frac{n}{2} \cdot 1 + \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{n^2}{4} + n = \Omega(n^2)$$

משילוב שני החסמים נקבל $\sum_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2)$. אפשר היה לשפר את החסם התחתון במקרה זה גם כך:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n/2} i + \sum_{i=n/2+1}^{n} i \geq \sum_{i=n/2+1}^{n} i \geq \frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} = \Omega(n^2)$$

שימו לב שבאי-שוויון הראשון פשוט ויתרנו על המחובר $\sum_{i=1}^{n/2} i$, ובכך כמובן רק הקטנו את הסכום. שוב הגענו לאותה התוצאה.

דוגמה 7.2.9: באופן דומה אפשר להראות כי $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} = \Theta(n^{3/2})$. הדרכה: כדי למצוא חסם תחתון, שוב תצטרכו לפצל את הסכום. נסו!

הערכת פונקציית העצרת

כפי שנראה בסעיף 7.4, יש בעיות רבות שבהן נדרשת הערכה של המקדמים הבינומיים. מכיוון שהמקדמים הבינומיים מוגדרים באמצעות מושג העצרת, חשוב לנו לדעת את ערכו האסימפטוטי של $n!$. כזכור, המספר $n!$ מוגדר כמכפלה של n גורמים, כלומר $n! = 1\cdot2\cdot3\cdots n$. על מנת לעבור לסכום שאותו נוכל להעריך, נחשב תחילה את הלוגריתם של $n!$ ונקבל:

$$\log(n!) = \log(1\cdot2\cdot3\cdots n) = \log(1) + \log(2) + \log(3) + \ldots + \log(n) = \sum_{i=1}^{n}\log(i).$$

מכיוון שפונקציית הלוגריתם עולה, קל לראות שהמחובר הקטן ביותר הוא הראשון $\log 1 = 0$, והגדול ביותר הוא האחרון $\log n$. מכאן קיבלנו את ההערכה הבאה:

$$0 \leq \log(n!) = \sum_{i=1}^{n}\log(i) \leq n\log(n)$$

החסם התחתון נראה עלוב למדי, ולכן נפנה לשפרו על ידי פיצול הסכום לשני טורים:

$$\log(n!) = \sum_{i=1}^{n}\log(i) = \sum_{i=1}^{n/2}\log(i) + \sum_{i=n/2+1}^{n}\log(i) \geq \frac{n}{2}\cdot\log(1) + \frac{n}{2}\cdot\log(n/2+1) \geq \frac{n}{2}\log\frac{n}{2}$$

ראינו עד כה כי:

$$\frac{n}{2}\log\frac{n}{2} \leq \log(n!) \leq n\log n$$

ולכן $\log(n!) = \Theta(n\log n)$. השתמשנו כאן בעובדה ש- $\frac{n}{2}\log\frac{n}{2} = \Omega(n\log n)$ (ראו תרגיל 7 בסעיף 7.1).

אילו רצינו להעריך אסימפטוטית את $\log(n!)$ כבר הגענו ליעדנו כי התשובה היא $\Theta(n\log n)$. אולם מטרתנו הייתה להעריך את סדר הגודל של $n!$. נחשב את הפונקציה המעריכית של האי-שוויון

$\frac{n}{2}\log\frac{n}{2} \le \log(n!) \le n\log n$ שהוכחנו. בהנחה שכל הלוגריתמים שהופיעו לעיל היו בבסיס 2, נקבל:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} = 2^{(n/2)\log(n/2)} \le n! \le 2^{n\log n} = n^n$$

שימו לב שהפער בין החסם העליון n^n לתחתון $\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}$ גדול מאוד. כך למשל, $n^n \ge \left(\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}\right)^2$, כלומר החסם העליון גדול מריבועו של החסם התחתון! משמע שאף כי הערכנו את $\log(n!)$ הערכה אסימפטוטית מדויקת, שיטתנו לא אפשרה הערכה מספקת ל- $n!$ עצמו. בהמשך נשכלל את שיטותינו ונוכל להשיג גם מטרה זו (ראו דוגמה 7.2.13).

הטור ההרמוני

נקרב את ערכו של הטור $h(n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$. טור זה ידוע בשם **הטור ההרמוני**. בקורס בחשבון דיפרנציאלי, ראיתם אולי, הוכחה לכך שהטור $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ מתבדר ל- ∞. פירוש הדבר שהסכומים $h(n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ הולכים וגדלים ל- ∞ כאשר n גדל. בפרק הנוכחי איננו מסתפקים בטענה זו, אלא רוצים לברר מהו קצב הגידול של $h(n)$. אנו נראה כי $h(n) = \Theta(\log n)$. ניתוח יותר מדויק שיוצג בהמשך מראה תוצאה מדויקת אף יותר: $h(n) = \ln(n) + O(1)$. ניתן להמשיך עוד מעבר לכך (אם כי לא נעשה זאת בספר זה) ולהראות כי:

$$h(n) = \ln(n) + \gamma + O(1/n)$$

כאשר $\gamma = 0.5772\ldots$ הוא **הקבוע של אוילר** ו- $\ln(n)$ הוא הלוגריתם בבסיס הטבעי $e = 2.71828\ldots$.

מהלך הדברים הזה אופייני: התוצאה $h(n) \to \infty$ הולכת ומתעדנת בתהליך שנקרא הפיתוח האסימפטוטי של הפונקציה $h(n)$. לנושא זה מוקדש תחום באנליזה המתמטית שכאן אנו מציגים רק את צעדיו הראשונים. נפתח אם כן בתהליך זה ונראה כי $h(n) = \Theta(\log n)$.

נקרב את הטור על ידי פיצולו לטורים חלקיים. למען הנוחיות אנו נניח כי n הוא חזקה של 2 והלוגריתמים שלהלן הם בבסיס 2. בהמשך נעיר כיצד לטפל במקרה הכללי.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = (1) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right) + \ldots$$
$$+\left(\frac{1}{2^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^i}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{\log n-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^{\log n}}\right)$$

יש כאן logn+1 סוגריים, כאשר באופן כללי בסוגריים $\left(\frac{1}{2^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^{i}}\right)$ יש 2^{i-1} מחוברים.

את הסכום שבתוך כל סוגריים אפשר לחסום כך:

$$\frac{1}{2}=2^{i-1}\cdot\frac{1}{2^{i}}\le\underbrace{\frac{1}{2^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^{i}}}_{2^{i-1}}\le 2^{i-1}\cdot\frac{1}{2^{i-1}+1}\le 1$$

מכאן:

$$.\frac{1}{2}(1+\log n)\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\le 1+\log n$$

דהיינו, $h(n) = \Theta(\log n)$ כפי שטענו.

מה קורה אם n איננו חזקה של 2? השינוי היחיד הדרוש הוא בסוגריים האחרונים שבסכום, כאשר במקרה זה יופיעו שם רק חלק מהמחוברים. לצורך החסם העליון אנו נניח שכל המחוברים אכן מופיעים שם, ולצורך החסם התחתון אנו נתעלם כליל מהמחוברים שבסוגריים האחרונים. ההבדל בין החסמים הוא רק בקבוע חיבורי של 1 לכל היותר, ולכן גם בניתוח ל- n כללי מתקבל $h(n) = \Theta(\log n)$.

קירוב טורים על ידי אינטגרלים

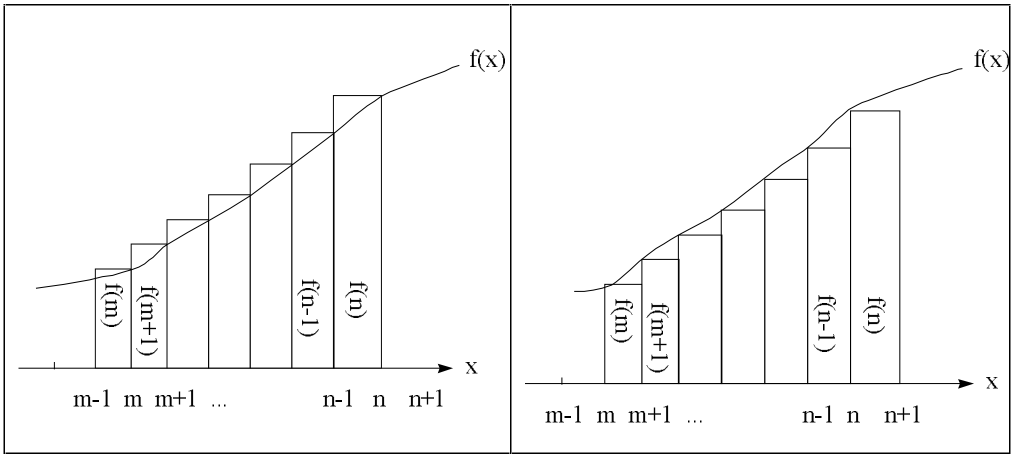
השימוש בכלים מתחום החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי מסייע לעתים בקירוב טורים.

משפט 7.2.10: תהי $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^{+}$ פונקציה.

1. אם הפונקציה f מונוטונית עולה, אז $\int_{m-1}^{n} f(x)dx\le\sum_{i=m}^{n} f(i)\le\int_{m}^{n+1} f(x)dx$
2. אם הפונקציה f מונוטונית יורדת, אז $\int_{m}^{n+1} f(x)dx\le\sum_{i=m}^{n} f(i)\le\int_{m-1}^{n} f(x)dx$

הוכחה: נוכיח את המשפט עבור פונקציה מונוטונית עולה. ההוכחה לפונקציה מונוטונית יורדת דומה.

נוכיח תחילה כי $\sum_{i=m}^{n} f(i)\le\int_{m}^{n+1} f(x)dx$. נתבונן בגרף של הפונקציה f, ונחלק את השטח שמתחת לגרף למלבנים כפי שמראה תרשים 7.2.1 מימין.



תרשים 7.2.1: הערכת סכום על ידי אינטגרל.

בכל אחד מן המלבנים המופיעים בתרשים 7.2.1 מימין, אורך הצלע שמקבילה לציר ה- x הוא 1, ואילו אורך הצלע המקבילה לציר ה- y הוא $f(i)$, וזאת עבור $i = m,m+1,\dots,n$. השטח של מלבן כזה יהיה כמובן $1\cdot f(i) = f(i)$. לכן, סכום שטחי המלבנים יהיה $\sum_{i=m}^{n} f(i)$. אולם כפי שניתן לראות בתרשים, סכום שטחי המלבנים קטן או שווה לשטח הכלוא מתחת לגרף של הפונקציה f בין הגבולות m ל- $n+1$, כי f פונקציה מונוטונית עולה. לכן, נקבל את האי-שוויון $\sum_{i=m}^{n} f(i) \le \int_{m}^{n+1} f(x)dx$ כנדרש.

כדי להוכיח את האי-שוויון השני $\int_{m-1}^{n} f(x)dx \le \sum_{i=m}^{n} f(i)$ נחלק שוב את השטח שמתחת לגרף הפונקציה למלבנים כפי שמראה תרשים 7.2.1 משמאל. הפעם סכום שטחי המלבנים גדול מהשטח הכלוא מתחת לגרף הפונקציה, ושוב מקבלים את האי-שוויון הדרוש. □

דוגמה 7.2.11: הפונקציה $f(n) = n^4$ היא פונקציה מונוטונית עולה. לכן לפי המשפט האחרון,

$$\int_{0}^{n} x^4 dx \le \sum_{i=1}^{n} i^4 \le \int_{1}^{n+1} x^4 dx$$

מכאן,

$$\frac{n^5}{5} \le \sum_{i=1}^{n} i^4 \le \frac{(n+1)^5}{5} - \frac{1}{5}$$

ולכן, $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \Theta(n^5)$. למען האמת הוכחנו תוצאה מדויקת יותר והיא:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = (1+o(1))\frac{n^5}{5}$$

(מה פירוש הדבר ש- $g(n) = o(1)$?).

דוגמה 7.2.12: נקרב שנית את הטור ההרמוני $h(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, הפעם על ידי שימוש באינטגרלים.

הפונקציה $\frac{1}{n}$ היא פונקציה יורדת. מכיוון שהפונקציה $\frac{1}{x}$ אינה מוגדרת כאשר $x = 0$, נקרב את הטור החל מ- $i = 2$. לכן, על פי משפט **7.2.10**:

$$\ln(n+1) - \ln(2) = \int_{2}^{n+1} \frac{dx}{x} \le \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \le \int_{1}^{n} \frac{dx}{x} = \ln(n)$$

מכאן (לאחר שנוסיף בחזרה את האיבר הראשון של הטור):

$$\ln(n+1) + 1 - \ln(2) \le h(n) \le \ln(n) + 1$$

(כאשר כזכור ln הוא הלוגריתם בבסיס הטבעי e). לכן $h(n) = \Theta(\ln(n))$. וביתר דיוק, מכיוון ש- $\ln(n+1) = \ln n + O(1/n)$ (ראו תרגיל 5 בסעיף 7.1), התקדמנו והוכחנו את התוצאה המדויקת יותר: $h(n) = \ln n + \Theta(1)$.

דוגמה 7.2.13: כזכור הוכחנו כי $\log(n!) = \sum_{i=1}^{n} \log(i) = \Theta(n \log n)$ על ידי חלוקת הטור $\sum_{i=1}^{n} \log(i)$ לשני חלקים ומציאת חסם עליון ותחתון. הקירוב שמצאנו לא הספיק כדי לקבל הערכה טובה ל- $n!$. נקרב הפעם את הסכום $\ln(n!) = \sum_{i=1}^{n} \ln(i)$ על ידי שימוש באינטגרלים.

$$\int_{1}^{n} \ln(x)dx \le \sum_{i=1}^{n} \ln(i) = \sum_{i=2}^{n} \ln(i) \le \int_{1}^{n+1} \ln(x)dx$$

אולם $\int_{1}^{n} \ln(x)dx = n\ln(n) - (n-1)$ ולכן:

$$n\ln(n) - n + 1 \le \ln(n!) \le (n+1)\ln(n+1) - n .$$

כעת נוכל למצוא קירוב נוסף טוב יותר של $n!$. נחשב את הפונקציה המעריכית של הביטוי האחרון:

$$e^{n\ln(n)-n+1} \le e^{\ln(n!)} \le e^{(n+1)\ln(n+1)-n}$$

כלומר:

$$e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le e\cdot\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

זהו שיפור משמעותי לעומת הניסיון הקודם שלנו להעריך את $n!$. הפעם המנה בין החסם העליון לתחתון היא רק $\Theta(n)$ (הוכיחו!). ניתוח מדויק יותר ייתן את נוסחת סטירלינג, שאותה נצטט ללא הוכחה.

משפט 7.2.14 (נוסחת סטירלינג): $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

בעזרת שיטות יותר מתקדמות מאנליזה מתמטית אפשר להוכיח גם את החסמים הבאים ל- $n!$ הנכונים לכל n.

משפט 7.2.15: $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/(12n)-1/(360n^3)} \le n! \le \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/(12n)}$.

תרגילים

1. מצאו חסם הדוק לטור $\sum_{i=1}^{n} i^k$ כאשר $k \ge 0$ קבוע (שאינו תלוי ב- n):
   א. על ידי פיצול הטור לשני חלקים.
   ב. על ידי קירוב של הטור בעזרת אינטגרל.
   ג. באיזה שיטה מתקבל קירוב טוב יותר?
2. מצאו קירוב הדוק לטורים הבאים:
   א. $\sum_{i=1}^{n}\log_2(n/i)$
   ב. $\sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 n\rfloor}\log_2\left(n/2^i\right)$
   ג. $\sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 n\rfloor}\frac{1}{\log_2\left(n/2^i\right)}$
3. מצאו את ערכו האסימפטוטי של הטור הבא $\sum_{i=1}^{n}\left(\log_2 i\right)^3$.
4. הוכיחו כי $\log(n!) = \Theta(n\log n)$ על ידי שימוש בנוסחת סטירלינג לקירוב $n!$.

7.3. אי-שוויונות מועילים

הנושאים שיוצגו: *הערכות לפונקציה* e^x.

האי-שוויונות שנציג בסעיף זה מסייעים במקרים מסוימים בקירובים של פונקציות.

משפט 7.3.1: יהי $x \in \mathbb{R}$ מספר ממשי כלשהו. אז $e^x \geq 1+x$ ושוויון מתקיים רק ל- $x = 0$.
הוכחה: יש לאי-שוויון הבסיסי הזה הוכחות שונות. ההוכחה הפשוטה ביותר מבחינה טכנית היא זו. נשים לב שבנקודה $x = 0$ שני האגפים שווים ל- 1. אנו טוענים ש- $x = 0$ הוא נקודת המינימום היחידה של הפונקציה:

$$f(x) = e^x - (1+x).$$

הנגזרת של הפונקציה היא:

$$f'(x) = e^x - 1.$$

ואכן הנגזרת שווה לאפס בנקודה $x = 0$ ורק בה. כמו-כן, הנגזרת השנייה מקיימת:

$$f''(0) = 1$$

ולכן זו נקודת מינימום, כלומר $e^x - (1+x) \geq 0$ לכל x. □

מסקנה 7.3.2: יהי $x \in \mathbb{R}$ מספר ממשי כלשהו. אז $e^{-x} \geq 1-x$ ושוויון מתקיים רק ל- $x = 0$.

לעתים נזדקק גם לאי-שוויון בכיוון ההפוך. בכך עוסק המשפט הבא.

משפט 7.3.3: יהי $x \in \mathbb{R}$ מספר ממשי בתחום $0 \leq x \leq 1/3$. אז $e^{-2x} \leq 1-x$.
הוכחה: נגדיר פונקציה

$$g(x) = 1 - x - e^{-2x}.$$

נשים לב שהפונקציה g מקיימת $g(0) = 0$. נראה שהפונקציה g עולה בקטע $[0,1/3]$, ולכן, בפרט $g(x) \geq 0$ לכל $0 \leq x \leq 1/3$ כנדרש. נגזור את הפונקציה g ונקבל:

$$g'(x) = -1 + 2e^{-2x}.$$

נבדוק האם $g'(x) > 0$ לכל $0 < x \leq 1/3$. קל לראות שהפונקציה g' יורדת, ולכן די לבדוק ש- $g'(1/3) > 0$. ואכן,

$$g'(1/3) = 2e^{-2/3} - 1 > 0$$

ובזאת מסתיימת ההוכחה. (בדקו את האי-שוויון האחרון במחשב. אתגר קטן לאלה שכבר למדו חשבון אינפיניטסימלי: האם תוכלו לתת הוכחה פורמלית לאי-שוויון הזה?) □

תרגילים

1. הוכיחו שאם $0 \le x \le \frac{1}{2}$ אז $e^x \le 1+2x \le e^{2x}$.

2. א. בקורס בחשבון אינפיניטסימלי עסקתם בוודאי בבעיות של סיכום טורים אינסופיים. מה בדבר מכפלות? נביט במכפלה האינסופית $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x_n)$ כש- $x_n \ge 0$. הוכיחו שהמכפלה הזאת סופית אם ורק אם הסכום האינסופי $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ מתכנס.

ב. הסיקו מכך שהטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר. הדרכה: למה שווה המכפלה $\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{j}\right)$?

7.4. הערכת גודלם של המקדמים הבינומיים

הנושאים שיוצגו: *קירובים למקדמים הבינומיים, פונקצית האנטרופיה הבינארית.*

בהקשרים רבים מתעורר הצורך להעריך את גודלם של המקדמים הבינומיים. לכאורה השאלה משונה - הרי יש לנו נוסחה מפורשת לחישוב המקדם הבינומי ומה הצורך בהערכה בלבד? כדי להמחיש את השאלה והתשובה נתרכז לרגע במקדם הבינומי האמצעי $\binom{n}{n/2}$ (כאשר אנו מניחים לנוחיותנו להלן ש- n מספר זוגי). מה נוכל לומר על גודלו? מן הביטוי

$$\binom{n}{n/2} = \frac{n!}{(n/2)!(n/2)!}$$

קשה להבין איך גדלים המספרים האלה כפונקציה של n. מן הזהות (משפט 4.3.3):

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

ברור ש- $\binom{n}{n/2} \le 2^n$ לכל n (הרי 2^n הוא סכום כל המקדמים הבינומיים, והמקדם $\binom{n}{n/2}$ הוא רק אחד מהם). מאידך גיסא, מספר המחוברים בסכום הוא n+1 ולכן ערכם הממוצע הוא $\frac{2^n}{n+1}$.

כפי שראינו $\binom{n}{n/2}$ הוא המקדם הבינומי הגדול ביותר (משפט 4.3.8), ולכן אינו נופל מן הממוצע.

כלומר $\frac{2^n}{n+1} \ge \binom{n}{n/2}$ לכל $n \ge 0$. עד כה ראינו אם כן כי:

$$\frac{2^n}{n+1} \le \binom{n}{n/2} \le 2^n$$ לכל $n \ge 0$.

שימו לב שביטוי זה מאפשר לנו להעריך מיד את ערכו של המקדם $\binom{n}{n/2}$ כש- n גדול. למשל, עבור $n = 1000$ נקבל ש-

$$2^{990} = 2^{1000-10} = \frac{2^{1000}}{1024} < \frac{2^{1000}}{1001} \le \binom{1000}{500} \le 2^{1000}.$$

ניתן לקבל הערכה מדויקת יותר בעזרת נוסחת סטירלינג המספקת הערכה ל- $n!$ (ראו משפט 7.2.14). כזכור על פי נוסחת סטירלינג:

$$n! = (1+o(1))\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}.$$

הערה: שימו לב שמשמעות הדבר היא שהמנה בין שני האגפים שואפת ל- 1 כאשר $n\to\infty$, כלומר $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n\sqrt{2\pi n}/e^n} = 1$ (ראו גם תרגיל 6 בסעיף 7.1).

בעזרת נוסחת סטירלינג נוכל לקבל את ההערכה הבאה לביטוי $\binom{n}{n/2} = \frac{n!}{(n/2)!(n/2)!}$:

$$\binom{n}{n/2} = (1+o(1))\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}{\left(\frac{n/2}{e}\right)^n \pi n} = (1+o(1))\frac{2^n}{\sqrt{\pi n/2}} = \Theta\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}}\right)$$

אם נעריך שנית את גודלו של המקדם הבינומי האמצעי $\binom{1000}{500}$, נקבל את ההערכה הבאה:

$$\frac{2^{1000}}{\sqrt{500\pi}}$$

ואכן קיבלנו טעות של כ- 3 מאיות האחוז בלבד. אתם מוזמנים לבדוק זאת על ידי שימוש במשפט 7.2.15 המספק חסמים ל- $n!$ הנכונים לכל n. הוכחנו אם כן את המסקנה הבאה:

מסקנה 7.4.1: $\binom{n}{n/2} = \Theta\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}}\right)$.

שאלה כללית יותר המתעוררת אף היא לעתים קרובות היא איך מתנהגים המקדמים הבינומיים $\binom{n}{\lfloor n\alpha \rfloor}$, כאשר $0 < \alpha < 1$ קבוע כלשהו ו- n הולך וגדל? מנוסחת סטירלינג נובע שהגידול הוא מעריכי ב- n, כלומר התשובה היא בערך λ^n, כאשר λ קבוע שערכו תלוי ב- α. אבל מהו ערכו של λ? נעלה את שני הביטויים בחזקת 1/n, ונשאל: לאיזה מספר λ שואפים המספרים $\binom{n}{\lfloor n\alpha \rfloor}^{1/n}$ כש- n גדול. נוח יותר יהיה לעבור ללוגריתם בשני האגפים, כלומר נחפש ביטוי מהצורה $\frac{1}{n}\log\binom{n}{\lfloor n\alpha \rfloor} = (1+o(1))\log\lambda$.

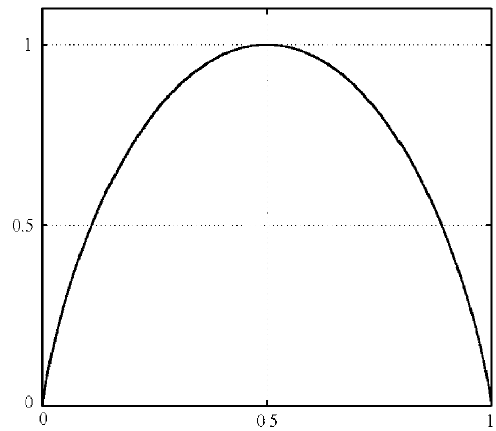
וזו במדויק השאלה שנשאל: למה שואפים המספרים $\frac{1}{n}\log\binom{n}{\lfloor n\alpha \rfloor}$ כש- n הולך וגדל? על ידי הצבה בנוסחת סטירלינג וחישובים די פשוטים, יוצא כי הביטוי $\frac{1}{n}\log\binom{n}{\lfloor n\alpha \rfloor}$ שואף ל- $\log\lambda = -\alpha\log\alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha)$ כש- n שואף ל- ∞.

הגדרה 7.4.2: הפונקציה $H(x) = -x\cdot\log x - (1-x)\cdot\log(1-x)$ המוגדרת לכל $0 \le x \le 1$ נקראת פונקצית **האנטרופיה הבינארית**. ההגדרה מורחבת גם לנקודות הקצה על ידי $H(0) = H(1) = 0$.

לפונקצית האנטרופיה יש חשיבות רבה בתחומים מדעיים רבים כמו פיזיקה, הסתברות ותורת האינפורמציה. בתרשים 7.4.1, ניתן לראות את הגרף של פונקצית האנטרופיה.

והתשובה לשאלה שיצאנו לחקור היא אם כן: $\frac{1}{n}\log\binom{n}{\lfloor n\alpha \rfloor} = (1+o(1))H(\alpha)$.

מסקנה 7.4.3: לכל $0 < \alpha < 1$ מתקיים $\binom{n}{\lfloor n\alpha \rfloor} = 2^{(1+o(1))nH(\alpha)}$.



תרשים 7.4.1: פונקצית האנטרופיה.

תרגילים

1. העריכו את מספר קטלן $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ בעזרת נוסחת סטירלינג.

2. הוכיחו כי $\binom{n}{k} < n^k$.

3. נניח ש- n גדול מאוד. איזה מהמקדמים הבינומיים הבאים גדול יותר?

   א. $\binom{2n}{n}$ או $\binom{n}{n/3}$?

   ב. $\binom{2n}{n/3}$ או $\binom{n}{n/2}$?

   הדרכה: את סעיף א׳ אפשר לפתור כמעט ללא חישובים. סעיף ב׳ יצריך שימוש בפונקצית האנטרופיה.

7.5. צפיפות המספרים הראשוניים

הנושאים שיוצגו: *מספרים ראשוניים תאומים, משפט המספרים הראשוניים והערכת $\pi(n)$.*

תורת המספרים היא אחד מנושאי המחקר הקדומים ביותר במתמטיקה. עוד היוונים התעניינו בתכונותיהם של המספרים הטבעיים. במוקד המחקר הזה עומדים במידה רבה המספרים

הראשוניים. בין התגליות היסודיות בתחום זה מצויות העובדות הבסיסיות המופיעות גם בספר זה בפרק 3:

א. יש אינסוף מספרים ראשוניים (משפט 3.1.12).

ב. לכל מספר טבעי יש הצגה (אחת ויחידה) כמכפלה של מספרים ראשוניים וחזקותיהם (משפט 3.1.11).

יחד עם זאת, עיון בסדרה של המספרים הראשוניים $2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,\ldots$ עשוי להביך את הקוראים ואיתם את מיטב המתמטיקאים. קשה לראות חוקיות פשוטה כאן. לאור המורכבות הגבוהה של הסדרה הזו, מתבקש לנסות ולהבינה במונחים פשוטים יותר. ביסודו של דבר, ברצוננו להבין מה צפיפותה של הסדרה הזו. לא קשה להוכיח שיש קטעים ארוכים כרצוננו של מספרים טבעיים שאף אחד מהם אינו ראשוני. להלן בנייה של רצף של $n-1$ מספרים טבעיים עוקבים שאף אחד מהם איננו ראשוני: $n!+2,\ n!+3,\ n!+4,\ldots,n!+n$ (הוכיחו זאת!). מאידך, איננו יודעים עד כמה צפופים יכולים להיות המספרים הראשוניים. למשל, אומרים ששני מספרים ראשוניים הם **תאומים** אם ההפרש ביניהם הוא 2. לדוגמה, הזוגות $(29,31)$ או $(107,109)$ הם זוגות של מספרים ראשוניים תאומים. אחת הבעיות הפתוחות הידועות של תורת המספרים היא: האם יש אינסוף זוגות של ראשוניים תאומים? אך יותר מכל מתבקשת השאלה הבאה:

כמה מספרים ראשוניים יש בין 1 ל- n?

נסמן כמקובל את התשובה ב- $\pi(n)$. ניתן לקוות שנוכל למצוא פיתוח אסימפטוטי לפונקציה $\pi(n)$. תקווה זו אכן התגשמה במידה רבה וידוע כי:

משפט המספרים הראשוניים: $\pi(n)=(1+o(1))\dfrac{n}{\ln n}$.

הוכחת משפט זה מצריכה שימוש בכלים החורגים מעבר למסגרת הספר הנוכחי. אולם, נוכל להוכיח טענה חלשה במקצת והיא:

משפט 7.5.1: $\pi(n)=\Theta\left(\dfrac{n}{\ln n}\right)$.

למעשה אנו נוכיח רק כי $\pi(n)=\Omega\left(n/\ln(n)\right)$, אך בהוכחה שנספק נמצאים כל הרעיונות הדרושים על מנת להוכיח גם כי $\pi(n)=O\left(n/\ln(n)\right)$. נוכיח תחילה מספר טענות עזר פשוטות הדרושות במהלך ההוכחה.

טענה 7.5.2: יהי m מספר טבעי ונתבונן בהצגה של $m!$ כמכפלת חזקות של מספרים ראשוניים שונים $q_1,q_2,\ldots$, כלומר $m!=\prod_i q_i^{b_i}$. אז $b_i=\left\lfloor\dfrac{m}{q_i}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{m}{q_i^2}\right\rfloor+\cdots$ לכל i.

הוכחה: לשם פשטות נסמן $b = b_i$, $q = q_i$. נביט במכפלה $m! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m$, ונוכיח שהחזקה הגבוהה ביותר b של q המחלקת את המכפלה היא אכן $b = \left\lfloor \frac{m}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{q^2} \right\rfloor + \cdots$.

יהי $1 \le j \le m$ מספר כלשהו במכפלה !m, ותהי α_j החזקה הגבוהה ביותר של q שמחלקת את j.

המספר b איננו אלא סכום ה- α_j הנ"ל. מספיק לכן להוכיח כי $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = \left\lfloor \frac{m}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{q^2} \right\rfloor + \cdots$.

בין המספרים $1,\ldots,m$ יש בדיוק $\left\lfloor \frac{m}{q} \right\rfloor$ מספרים j המתחלקים ב- q (ראו טענה 4.6.6). כלומר $\left\lfloor \frac{m}{q} \right\rfloor$ הוא מספרם של ה- $1 \le j \le m$ שבשבילם $\alpha_j \ge 1$. באופן דומה יש בדיוק $\left\lfloor \frac{m}{q^2} \right\rfloor$ מספרים j בתחום הנ"ל המתחלקים ב- q^2, כלומר בשבילם $\alpha_j \ge 2$, וכן הלאה.

לכן, המחובר הראשון $\left\lfloor \frac{m}{q} \right\rfloor$ בסכום $\left\lfloor \frac{m}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{q^2} \right\rfloor + \cdots$, מונה את כל המספרים j שבשבילם $\alpha_j \ge 1$. המחובר השני מונה את כל אלה שבשבילם $\alpha_j \ge 2$, וכך הלאה.

נביט עתה במספר מסוים $1 \le s \le m$ במכפלה !m שבשבילו $\alpha_s = k$. מספר זה נמנה פעם אחת עם $\left\lfloor \frac{m}{q} \right\rfloor$ המספרים שבשבילם $\alpha_j \ge 1$. הוא נמנה גם פעם אחת עם $\left\lfloor \frac{m}{q^2} \right\rfloor$ המספרים שבשבילם $\alpha_j \ge 2$, וכך הלאה, עד אשר הוא נמנה פעם אחת עם $\left\lfloor \frac{m}{q^k} \right\rfloor$ המספרים שבשבילם $\alpha_j \ge k$. אבל הוא איננו נמנה עם $\left\lfloor \frac{m}{q^{k+1}} \right\rfloor$ המספרים שבשבילם $\alpha_j \ge k+1$, וגם לא עם אלה שבשבילם $\alpha_j \ge k+2$ וכך הלאה. לכן, הוא נמנה בדיוק k פעמים בסכום $\left\lfloor \frac{m}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{q^2} \right\rfloor + \cdots$ כנדרש. □

טענה 7.5.3: יהיה p_i המספר הראשוני ה- i, ותהי $\binom{n}{n/2} = \prod_i p_i^{a_i}$ ההצגה של $\binom{n}{n/2}$ כמכפלה של חזקות של מספרים ראשוניים שונים $p_1, p_2, \ldots$. אז $a_i = \sum_{j\ge 1} \left(\left\lfloor \frac{n}{p_i^j} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n/2}{p_i^j} \right\rfloor \right)$.

הוכחה: אם $n! = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ ו- $(n/2)! = \prod_i p_i^{\beta_i}$ אז חשבון פשוט נותן:

$$.\binom{n}{n/2}=\frac{n!}{(n/2)!(n/2)!}=\frac{\prod_i p_i^{\alpha_i}}{\prod_i p_i^{2\beta_i}}=\prod_i p_i^{\alpha_i-2\beta_i}$$

את הערכים של α_i ו- β_i קובעים לפי טענה 7.5.2. □

טענה 7.5.4: לכל $x>0$ ממשי מתקיים $0\le\lfloor x\rfloor-2\lfloor x/2\rfloor\le 1$.

הוכחה: תרגיל לקוראים. □

נחזור כעת להוכחת המשפט הראשי של סעיף זה.

הוכחת משפט 7.5.1: עלינו להוכיח כי $\pi(n)=\Theta\left(\frac{n}{\ln n}\right)$. ההוכחה מתבססת מצד אחד על ההערכה של המקדם הבינומי האמצעי (מסקנה 7.4.1, סעיף 7.4):

$$\binom{n}{n/2}=\Theta\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}}\right)$$

(למען הנוחות נניח ש- n זוגי).

מן הצד השני נזדקק לייצוג של $\binom{n}{n/2}$ כמכפלה של חזקות של מספרים ראשוניים שונים. נניח כי:

$$\binom{n}{n/2}=\prod_i p_i^{a_i}$$

כאשר המכפלה עוברת על כל המספרים הראשוניים p_i הקטנים מ- n (בפיתוח לא יופיעו מספרים ראשוניים גדולים מזה, שכן $n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$, ולכן גורמים ראשוניים גדולים מזה לא יופיעו כאן).
תוכנית הפעולה שלנו היא זו: אנו נראה שלכל i, $n>p_i^{a_i}$. זאת אומרת, בייצוג $\binom{n}{n/2}=\prod p_i^{a_i}$, כל אחד מהגורמים $p_i^{a_i}$ אינו גדול במיוחד. מאידך, המספר $\binom{n}{n/2}$ הוא גדול, ולכן חייבים להיות במכפלה הזו גורמים רבים. ובמילים אחרות: יש מספרים ראשוניים רבים p_i בין 1 ל- n. כך נקבל כי $\pi(n)=\Omega\left(\frac{n}{\ln n}\right)$.

מטרתנו הראשונה היא לברר מהם המעריכים a_i. על פי טענה 7.5.3:

$$.\ a_i=\sum_{j\ge1}\left(\left\lfloor\frac{n}{p_i^j}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n/2}{p_i^j}\right\rfloor\right)$$

ננסה להעריך את הביטוי האחרון. נעיר תחילה כי בסכומים שלעיל נמנענו במכוון מציון הגבול העליון של הסכימה. נחזור ונתבונן בנוסחה $b_i = \left\lfloor \frac{m}{q_i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{q_i^2} \right\rfloor + \cdots$ שהופיעה בטענה 7.5.2 (שוב, b_i הוא המעריך של הראשוני q_i בפיתוח של $m!$ כמכפלת חזקות של מספרים ראשוניים). ברור שכאשר המקדם j גדול דיו, המספר $\frac{m}{q_i^j}$ קטן מ- 1, ומכאן ואילך כל המחוברים $\left\lfloor \frac{m}{q_i^j} \right\rfloor$ מתאפסים, כי מדובר בחלק השלם של מספר בין 0 ל- 1. מהו הערך של j שבו המספר $\frac{m}{q_i^j}$ קטן לראשונה מ- 1? עלינו לפתור את האי-שוויון $\frac{m}{q_i^j} < 1$. פתרון האי-שוויון הזה הוא $j > \frac{\log m}{\log q_i}$.

ניתן אם כן לדייק ולרשום את $a_i = \sum_{j\geq 1}\left(\left\lfloor \frac{n}{p_i^j} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n/2}{p_i^j} \right\rfloor \right)$ כך:

$$a_i = \sum_{\frac{\log n}{\log p_i} \geq j \geq 1}\left(\left\lfloor \frac{n}{p_i^j} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n/2}{p_i^j} \right\rfloor \right).$$

לפי טענה 7.5.4, כל מחובר בסכום הזה ≤ 1. מספר המחוברים בסכום הוא $\frac{\log n}{\log p_i}$. לכן,

$$a_i \leq \frac{\log n}{\log p_i} \text{ לכל } i.$$

מכאן,

$$a_i \log p_i \leq \log n.$$

כלומר,

$$p_i^{a_i} \leq n.$$

אם כך, במכפלה $\binom{n}{n/2} = \prod p_i^{a_i}$ מופיעים $\pi(n)$ גורמים וכל אחד מהם כאמור חסום מלמעלה $p_i^{a_i} \leq n$. לכן,

$$n^{\pi(n)} \geq \binom{n}{n/2} = \Theta\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}}\right).$$

נעבור ללוגריתם בשני האגפים ונקבל:

$$\pi(n)\log n \geq (1-o(1))n$$

כלומר $\pi(n) = \Omega(n/\log n)$ כפי שטענו. בדרך דומה ניתן להראות גם את האי-שוויון המשלים $\pi(n) = O(n/\log n)$, אך לא נעשה זאת כאן. □

תרגילים

1. יהיה n מספר טבעי זוגי. נסמן את המספר $1\cdot3\cdot5\cdots(n-3)\cdot(n-1)$ ב- $n!!$.
   א. הוכיחו שמספר הזיווגים המושלמים בגרף השלם K_n הוא $n!!$.
   ב. הוכיחו כי $\sqrt{n!} < n!! < \sqrt{(n+1)!}$.
   ג. הוכיחו כי $n!! = \Theta\left(n^{1/4}\sqrt{n!}\right)$.

   הדרכה: הראו כי הפונקציה $f(n) = \dfrac{(n!!)^4}{n!(n+1)!}$ היא פונקציה עולה וחסומה.

7.6. פתרון מקורב לנוסחאות נסיגה

הנושאים שיוצגו: *משפט האב, עץ רקורסיה.*

פעמים רבות איננו רוצים לפתור נוסחת נסיגה בצורה מדויקת, אלא רק לקבל הערכה אסימפטוטית של הפתרון. במקרה זה קיימות שיטות רבות המאפשרות לקרב את הפתרון בצורה קלה יחסית, גם אם קשה למצוא פתרון מדויק. נצטט כאן ללא הוכחה משפט שימושי המאפשר להעריך את הערך האסימפטוטי של הפתרון של נוסחאות נסיגה רבות.

משפט 7.6.1 (משפט האב Master Theorem):
תהי $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ פונקציה ויהיו $a \ge 1, b > 1$ קבועים ממשיים. נתבונן בנוסחת הנסיגה הבאה:
$T(n) = aT(n/b) + f(n)$, כאשר $T(1) = \Theta(1)$.

הפתרון האסימפטוטי של נוסחת הנסיגה תלוי בהשוואה בין $f(n)$ לבין $n^{\log_b a}$ כדלקמן:

1) אם קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$, אז $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
2) אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ אז $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}\log n)$.
3) אם קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$, ואם $af(n/b) \le cf(n)$ עבור קבוע כלשהו $c < 1$ ולכל n גדול דיו, אז $T(n) = \Theta(f(n))$.

הערה: הביטוי $T(n/b)$ שבנוסחת הנסיגה של $T(n)$ לא תמיד מוגדר אם b איננו מחלק את n. מתברר שבין אם נחליף זאת ב- $T\left(\lfloor n/b \rfloor\right)$ או ב- $T\left(\lceil n/b \rceil\right)$, ההתנהגות האסימפטוטית של $T(n)$ לא תשתנה, וטענת המשפט תקפה בשני המקרים. דיון נוסף בנקודה זו ייערך בהמשך.

מקרה פרטי של משפט האב: אף כי לא נוכיח כאן את משפט האב, נראה להלן משהו מן הרעיון המרכזי שבהוכחה. נטפל במקרה ש- $f(n) = 0$, כלומר, $T(n)$ מוגדת באמצעות נוסחת הנסיגה

$T(n) = aT(n/b)$. נניח לשם פשטות ש- n הוא חזקה של b, ולכן b מחלק את n. נפתור את הנוסחה בעזרת הצבה חוזרת (ראו סעיף 6.1). על ידי שימוש חוזר בנוסחת הנסיגה נקבל:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) = a^2T\left(\frac{n}{b^2}\right) = a^3T\left(\frac{n}{b^3}\right)$$

לאחר k הצבות חוזרות בנוסחה נקבל:

$$T(n) = a^kT\left(\frac{n}{b^k}\right)$$

ערך ההתחלה הוא $T(1) = \Theta(1)$, ולכן כאשר $k = \log_b n$ נקבל:

$$T(n) = a^{\log_b n}T\left(\frac{n}{b^{\log_b n}}\right) = a^{\log_b n}T(1) = n^{\log_b a} \cdot \Theta(1) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$$

חלק 1 של משפט האב אומר שגם אם מגדילים מעט את $T(n)$, כלומר $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, לא ניכר גידול אסימפטוטי בערך של $T(n)$ כל עוד $f(n)$ קטנה די הצורך. מאידך גיסא מקרה 3 של המשפט אומר שאם $f(n)$ גדולה דיה, אז דווקא לגורם $aT(n/b)$ יש תרומה זניחה אסימפטוטית ו- $T(n) = \Theta(f(n))$. דיון נוסף בהוכחה תוכלו למצוא בתרגיל 2.

כאמור בהינתן נוסחת נסיגה כנ"ל עלינו לברר תחילה מה היחס בין $f(n)$ לבין הביטוי $n^{\log_b a}$. אם $f(n)$ קטנה אסימפטוטית מ- $n^{\log_b a}$, ותישאר קטנה אסימפטוטית גם כאשר נקטין את הביטוי $n^{\log_b a}$ פי n^{ε}, כי אז אנחנו במקרה הראשון של משפט האב. בדומה אם $f(n)$ גדולה אסימפטוטית מ- $n^{\log_b a}$, ותישאר כך גם כאשר נגדיל את הביטוי $n^{\log_b a}$ פי n^{ε}, כי אז אנחנו במקרה השלישי של משפט האב (שימו לב שבמקרה זה עלינו לבדוק תנאי נוסף). ואילו אם $f(n)$ ו- $n^{\log_b a}$ שווים אסימפטוטית, אז אנחנו במקרה השני של משפט האב.
הנה דוגמאות לנוסחאות נסיגה המתאימות לכל אחד מהמקרים שפותר המשפט.

דוגמה 7.6.2: נתבונן בנוסחת הנסיגה $T(n) = 4T(n/2) + n$. במקרה זה $a = 4,\ b = 2$ ואילו $f(n) = n$. כדי להחליט באיזה מקרה אנו של המשפט, נחשב את הביטוי $n^{\log_b a} = n^{\log_2 4} = n^2$. מתקיים $f(n) = O(n^{2-\varepsilon})$ עבור $\varepsilon = 1$. לכן מדובר במקרה 1 של המשפט, ופתרון הנוסחה הוא $T(n) = \Theta(n^2)$.

דוגמה 7.6.3: הפעם $T(n)$ נתונה באמצעות נוסחת הנסיגה $T(n) = 2T(n/2) + n$. במקרה זה $a = 2$, $b = 2$ ואילו $f(n) = n$. מתקיים $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$, כלומר $f(n) = \Theta(n)$. זהו מקרה 2 של המשפט, ולכן פתרון הנוסחה הוא $T(n) = \Theta(n\log n)$. האם תוכלו להוכיח את התוצאה הזאת גם בעזרת שיטת ההצבה החוזרת?

דוגמה 7.6.4: נתונה נוסחת הנסיגה $T(n) = 2T(n/2) + n^2\log n$. במקרה זה $a = 2, b = 2$ ואילו $f(n) = n^2\log n$. כאן $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$, כלומר $f(n) = \Omega(n^{1+\varepsilon})$, עבור $\varepsilon = 1$. לכן זה מקרה 3 של המשפט. במקרה זה עלינו לבדוק עוד אם יש קבוע $c < 1$ כך ש- $af(n/b) \le cf(n)$ עבור n גדול דיו.
ואכן:

$$af(n/b) = 2f(n/2) = \frac{n^2}{2}\log\frac{n}{2} \le cn^2\log n$$

עבור $c = ½$. מכאן שפתרון הנוסחה הוא $T(n) = \Theta(n^2\log n)$.

שימו לב שמשפט זה אינו מתאים לכל סוגי נוסחאות הנסיגה. כך, למשל, הנוסחה $T(n) = T(n-1) + n$ אינה מתאימה לתבנית של הנוסחאות שצורתן $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, מכיוון שלא קיים מספר קבוע $b > 1$ המקיים $n-1 = n/b$ לכל n.
גם נוסחה מהצורה $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + 1$ אינה מהצורה המתאימה. אולם גם אם הנוסחה היא מהצורה $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, לא בהכרח אפשר לפתור אותה בעזרת המשפט, כי ייתכן שאינה מתאימה לאף אחד משלושת התנאים של המשפט.

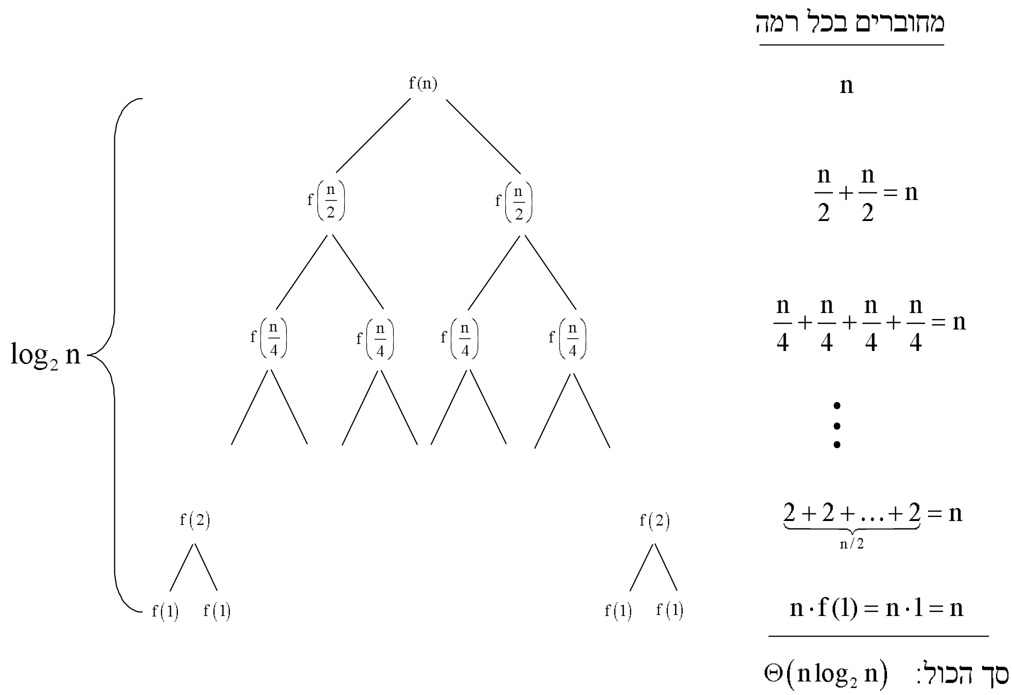
דוגמה 7.6.5: $T(n)$ מוגדרת על ידי נוסחת הנסיגה $T(n) = 2T(n/2) + n\log n$. במקרה זה $a = 2$, $b = 2$, ואילו $f(n) = n\log n$. כאן $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$. אמנם הפונקציה $f(n)$ גדולה ממש מהביטוי $n^{\log_b a} = n$, אולם לא קיים $\varepsilon > 0$ שמקיים $f(n) = \Omega(n^{1+\varepsilon})$. לכן, אי-אפשר במקרה זה להשתמש במשפט האב, ויש למצוא פתרון לנוסחה בדרכים אחרות (ראו תרגיל 5).

עץ רקורסיה

עץ רקורסיה מאפשר לתאר בצורה ציורית את התהליך הרקורסיבי המתבצע בחישוב של נוסחת נסיגה כלשהי, ולסכם באופן מסודר את כל המחוברים המצטברים במהלך החישוב. מכיוון שיש בדרך זו חלקים של ניחוש, יש צורך בדיעבד לאחר שמגיעים לפתרון, להוכיח פורמלית (כרגיל בעזרת אינדוקציה) שזה אכן הפתרון. הדרך הטובה ביותר ללמוד כיצד לבנות עץ רקורסיה היא בעזרת דוגמה.

דוגמה 7.6.6: נעיין בנוסחת הנסיגה הבאה $f(n) = 2f(n/2) + n$ עם ערך ההתחלה $f(1) = 1$. נשים לב תחילה ש- n אינו חייב להיות זוגי, ולכן ייתכן ש- $n/2$ אינו מספר שלם. במקרה זה נחשוב על $n/2$ כעל $\lfloor n/2 \rfloor$. מכיוון שאנחנו מחפשים פתרון מקורב לנוסחה מותר לעשות זאת, כפי שנראה בהמשך.
נתחיל אם כן לבנות את העץ. בשורש העץ נרשום את $f(n)$. לשורש יהיו שני ילדים מהצורה $f(n/2)$, וזאת מכיוון שהערך של $f(n)$ תלוי בשני הערכים הרקורסיביים של $f(n/2)$. לכל אחד מהקדקודים $f(n/2)$ יהיו 2 ילדים מהצורה $f(n/4)$ וזאת מכיוון שעל פי נוסחת הנסיגה $f(n/2) = 2f(n/4) + n/2$. נמשיך באותו אופן עד שנגיע לקדקוד מהצורה $f(1)$, כלומר לערך ההתחלה. קדקוד כזה יהיה עלה בעץ, שהרי את ערכו אנחנו יודעים. בזאת סיימנו לתאר את התהליך הרקורסיבי המתבצע בנוסחת הנסיגה. אולם יש לזכור שפרט לחלק הרקורסיבי יש בנוסחה $f(n) = 2f(n/2) + n$ גם מחובר n. אנו נרשום לצד כל רמה בעץ את המחוברים שבאותה רמה. הערך של הנוסחה כולה יהיה סכום המחוברים בכל הרמות של העץ.

כפי שניתן לראות מתרשים 7.6.1, סכום המחוברים בכל רמה הוא n. מכיוון שיש בעץ $\log_2 n$ רמות, הרי פתרון הנוסחה הוא $\Theta(n\log_2 n)$.
נרצה להראות במקרה הנדון שאכן התשובה האסימפטוטית שקיבלנו נכונה, אף כי השתמשנו תמיד בגורם n/2 ולא ב- $\lfloor n/2 \rfloor$ או ב- $\lceil n/2 \rceil$ כנדרש (וכיוצא בזה ב- $\lfloor n/4 \rfloor$ וכו'). הטעות המירבית שאנו עלולים לצבור בכל קדקוד של העץ היא $\Theta(1)$ ומכיוון שיש בעץ $O(n)$ קדקודים (הוכיחו!), הטעות שלנו חסומה על ידי $O(n)$. מכיוון ש- $n = o(n\log n)$ התוצאה שקיבלנו תקפה.



תרשים 7.6.1: עץ רקורסיה לנוסחה $f(n) = 2f(n/2) + n$.

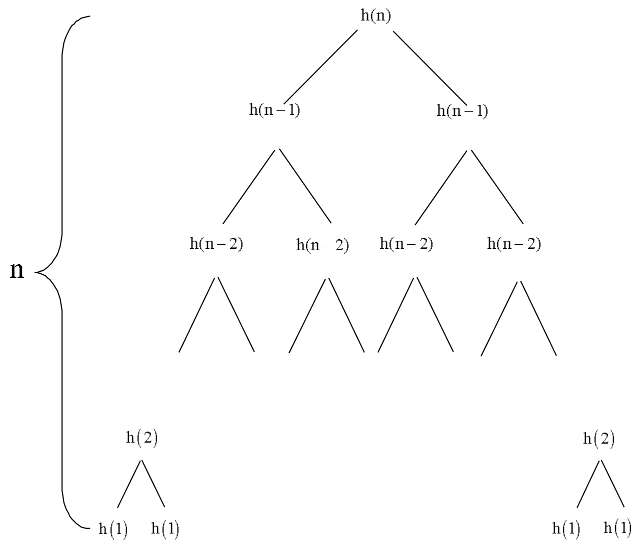
אמנם אין מתכון לפתרון נוסחאות נסיגה בעזרת עץ רקורסיה, אולם לעתים המצב הוא פשוט למדי ומתרחש אחד המצבים שלהלן:

- אם לכל קדקוד בעץ מתאים אותו מחובר בדיוק, אז הפונקציה המחושבת שווה למספר הקדקודים בעץ כפול אותו מחובר.
- אם כל רמה בעץ מסתכמת לאותו סכום, אז הפונקציה המחושבת שווה למספר הרמות בעץ כפול אותו סכום.
- לעתים העץ שלם ואז קל לחשב את מספר הקדקודים, את גובה העץ, מספר העלים וכדומה (ראו סעיף 5.2).
- אם העץ אינו שלם, ננסה לחסום את גובהו מלמעלה ומלמטה, וכך לקבל חסם עליון ותחתון לפתרון הנוסחה.

דוגמה 7.6.7: נתבונן בנוסחת נסיגה המוכרת לנו כבר היטב: מספר הצעדים הנדרשים לפתרון בעיית מגדלי האנוי. כזכור, $h(n) = 2h(n-1) + 1$, $h(1) = 1$. במקרה זה עץ הרקורסיה ייראה כמו בתרשים 7.6.2. מספר הרמות בעץ הוא n. הפעם המחוברים בכל רמה שונים זה מזה, ולכן יש לסכום את התרומה של כל הרמות. מתקבל הסכום הגיאומטרי הבא:

$$1+2+4+\ldots+2^{n-1}=2^n-1,$$

ולכן פתרון הנוסחה הוא: $h(n) = 2^n - 1$ כפי שראינו גם כשפתרנו את נוסחת הנסיגה הזאת גם בשיטות אחרות (ראו דוגמה 6.1.1).



מחוברים בכל רמה

1

$1+1=2$

$1+1+1+1=4$

$\vdots$

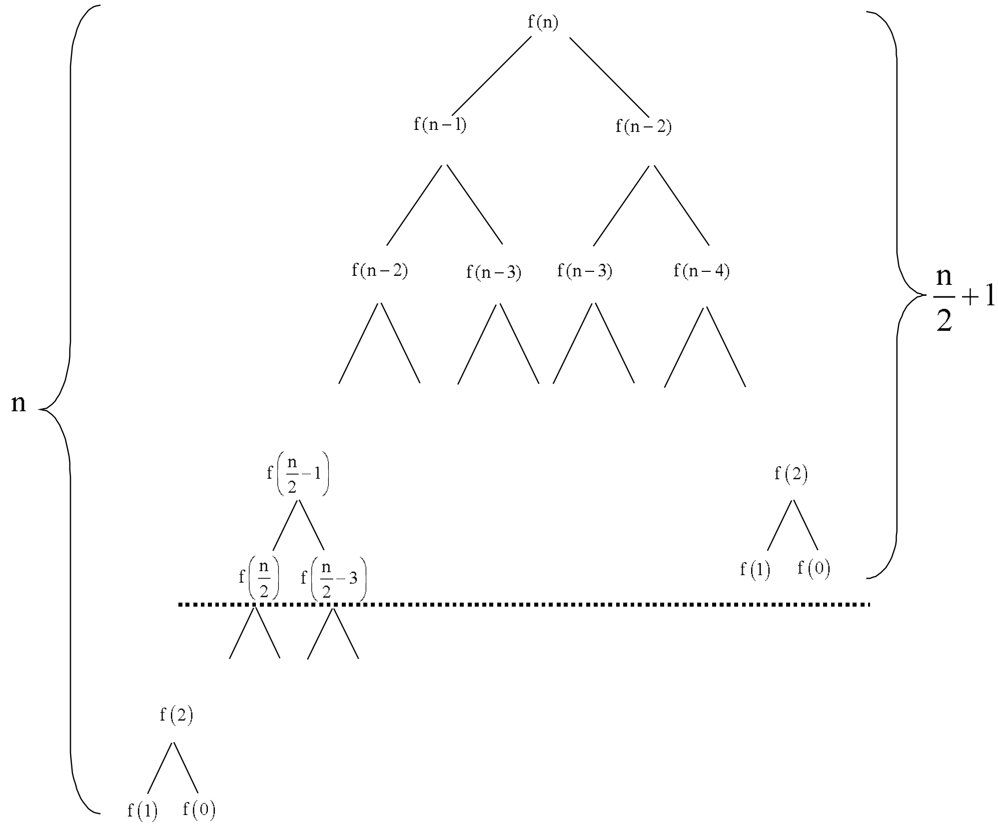
$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{2^{n-2}}=2^{n-2}$

$2^{n-1}\cdot h(1)=2^{n-1}\cdot 1=2^{n-1}$

סך הכול: $1+2+4+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$

תרשים 7.6.2: עץ רקורסיה לנוסחה $h(n) = 2h(n-1) + 1$.

דוגמה 7.6.8: נתבונן שוב בנוסחת פיבונאצ'י $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ כאשר $f(0) = f(1) = 1$. במקרה זה עץ הרקורסיה אינו שלם כפי שאפשר לראות בתרשים 7.6.3, אולם נוכל לקבל בעזרתו חסם עליון וחסם תחתון ל- $f(n)$. החסמים שנקבל אינם הדוקים, ולכן במקרה זה אם רוצים לקבל חסם הדוק ל- $f(n)$ יש להשתמש בשיטות שראינו בפרק 6, כגון השימוש בפונקציות יוצרות או בנוסחאות נסיגה ליניאריות הומוגניות.



תרשים 7.6.3: עץ רקורסיה לנוסחה $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.
העץ שלם עד לקו המקווקו.

בנוסחת הנסיגה $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ אין מחוברים פרט לחלקים הרקורסיביים $f(n-1)$ ו- $f(n-2)$. לכן אין צורך לסכם את המחוברים בכל רמה, אלא עלינו למצוא כמה קדקודים יש בעץ שערכם $f(0) = 1$ או $f(1) = 1$. כל קדקוד כזה הוא עלה, והוא יתרום 1 לערך הכולל של $f(n)$. נפנה לכן למניית מספר העלים שיש בעץ הרקורסיה המתאים לנוסחה.

נשים לב שעץ הרקורסיה שלם עד לרמה $\frac{n}{2}+1$. מכיוון שמספר העלים בעץ בינארי שלם מגובה $n/2$ הוא $2^{n/2}$ (ראו מסקנה 5.2.25), ובעץ הרקורסיה שלנו מספר העלים גדול לפחות כמספר העלים בעץ שלם מגובה $n/2$, הרי שהוכחנו חסם תחתון ל- $f(n)$ מהצורה:

$$f(n) = \Omega\left(2^{n/2}\right).$$

מה לגבי החסם העליון? ברור שמספר העלים בעץ הרקורסיה שלנו אינו עולה על מספר העלים בעץ שלם שגובהו n (כגובה עץ הרקורסיה במקרה זה). לכן נקבל את החסם העליון הבא:

$$f(n) = O\left(2^{n}\right).$$

כאמור יש פער גדול למדי בין החסם העליון לחסם התחתון שהוכחנו כאן, אולם החסמים האלה לפחות מרמזים לנו שהפתרון של נוסחת הנסיגה הנ״ל הוא מעריכי ב- n.

דוגמה 7.6.9: נתבונן לסיום בנוסחת הנסיגה $f(n) = f(n/4) + f(n/2) + n$ עם ערכי ההתחלה $f(0) = f(1) = 1$. בתרשים 7.6.4 מצויר עץ הרקורסיה המתאים לנוסחה זו. גם במקרה זה עץ הרקורסיה אינו שלם. המסלול הימני ביותר בעץ הרקורסיה ארוך יותר מאשר המסלול השמאלי ביותר של העץ. אולם שוב אפשר לקבל בעזרת העץ חסם עליון ותחתון לערכה של $f(n)$, והפעם כפי שנראה נקבל חסם הדוק.

נחשב את תרומתם של המחוברים ברמה ה- i לסכום הכולל של המחוברים בכל הרמות. כפי שאפשר לראות מהעץ, כל מחובר ברמה ה- i הוא מהצורה $\frac{n}{4^k \cdot 2^{i-k}}$ כאשר $0 \le k \le i$ מספר כלשהו. הערך של מחובר המתאים לקדקוד מסוים ברמה הזאת, נקבע לפי מספר הצעדים שמאלה ומספר הצעדים ימינה לאורכו של המסלול משורש העץ ועד לקדקוד. כך למשל, לקדקוד הימני ביותר ברמה ה- i מתאים המחובר $\frac{n}{4^0 \cdot 2^i}$, מכיוון שמגיעים אליו על ידי i צעדים ימינה ו-0 צעדים שמאלה מהשורש. ואילו לקדקוד השמאלי ביותר ברמה זו מתאים המחובר $\frac{n}{4^i \cdot 2^0}$.

מספר הקדקודים ברמה ה- i של העץ הוא לכל היותר 2^i, כאשר כל קדקוד מתאים לסדרה מסוימת באורך i של צעדים שמאלה וימינה מהשורש. מספר הקדקודים שמתקבלים מ- k צעדים שמאלה ו- $i-k$ צעדים ימינה הוא כמובן $\binom{i}{k}$, כי יש לבחור את מיקומם של הצעדים שמאלה מתוך בסה״כ i צעדים מהשורש לקדקוד (טענה 4.2.15). מכאן, תרומתם של הקדקודים ברמה ה- i לסכום הכולל היא:

$$\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{n}{4^k \cdot 2^{i-k}}.$$

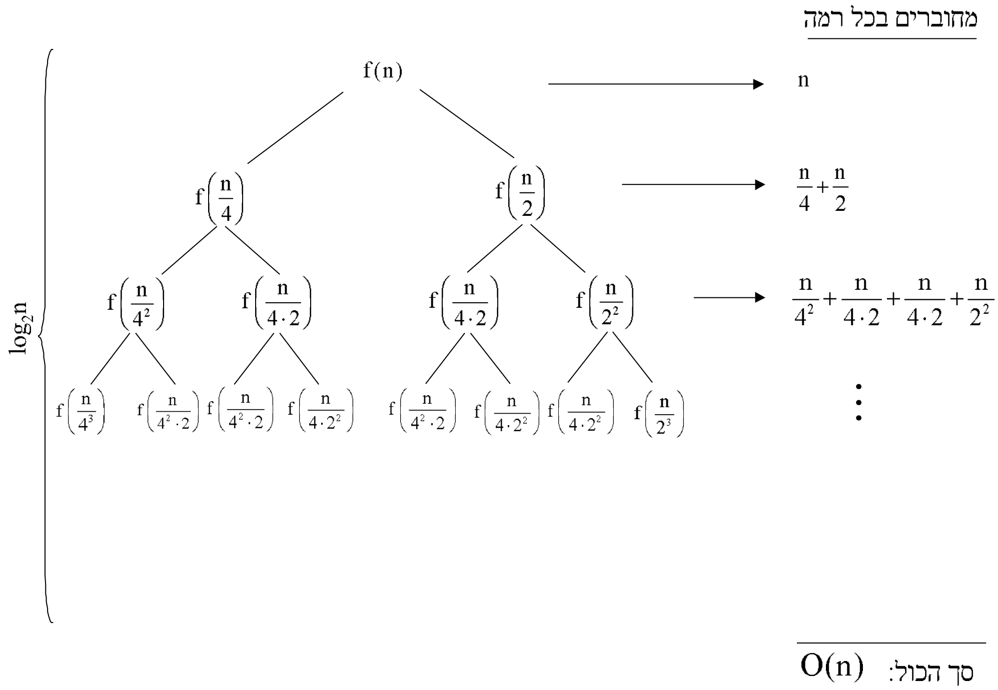
על ידי שימוש בנוסחת הבינום של ניוטון (משפט 4.3.1) אפשר להראות שסכום זה שווה ל:

$$\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{n}{4^k \cdot 2^{i-k}} = \frac{n}{2^i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{1}{2^k}\cdot 1^{i-k} = \frac{n}{2^i}\left(1+\frac{1}{2}\right)^i = n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^i.$$

מכיוון שגובהו של העץ הוא $\log_2 n$, הרי אם נסכם את תרומת כל הרמות לסכום הכולל, נקבל את החסם העליון הבא לנוסחת הנסיגה:

$$f(n) \le \sum_{i=0}^{\log_2 n} n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^i = n\cdot\sum_{i=0}^{\log_2 n}\left(\frac{3}{4}\right)^i \le n\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i = 4n.$$

מצד שני ודאי ש- $f(n) = \Omega(n)$ כי כבר בשורש העץ יש מחובר השווה ל- n. לכן, $f(n) = \Theta(n)$.



תרשים 7.6.4: עץ רקורסיה לנוסחה $f(n) = f(n/4) + f(n/2) + n$.

תרגילים

1. פתרו את נוסחאות הנסיגה הבאות בעזרת משפט האב:
   א. $T(n) = T(9n/10) + n$
   ב. $T(n) = 2T(n/2) + n^3$
   ג. $T(n) = 16T(n/4) + n^2$
   ד. $T(n) = 2T(n/2) + n^2$
   בכל המקרים ערך ההתחלה הוא $T(n) = \Theta(1)$.

2. הוכיחו את משפט האב עבור $n = b^k$ על ידי שימוש בשיטת ההצבה החוזרת. לשם כך:
   א. הראו על ידי הצבה חוזרת בנוסחה כי $T(n)=\Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{i=0}^{\log_b n-1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)$.
   ב. חסמו את ערכו של הטור $\sum_{i=0}^{\log_b n-1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)$ עבור כל אחד משלושת התחומים של הפונקציה f כפי שהם מופיעים בתנאי המשפט, והסיקו מכך את המשפט במקרה ש- $n = b^k$.

3. פתרו את נוסחאות הנסיגה הבאות בעזרת עץ רקורסיה:

א. $f(n) = 2f(n/2) + 1$, $f(1) = 1$.

ב. $f(n) = f\left(\sqrt{n}\right) + n^2$, $f(1) = f(2) = 1$.

ג. $f(n) = f\left(\sqrt{n}\right) + 1$, $f(1) = f(2) = 1$.

4. יהי $0 < a < 1$ קבוע כלשהו. פתרו את הנוסחאות הבאות בעזרת עץ רקורסיה:

א. $T(n) = T(a\cdot n) + T((1-a)\cdot n) + n$, $T(1) = 1$.

ב. $T(n) = T(a\cdot n) + T((1-a)\cdot n) + 1$, $T(1) = 1$.

5. בתרגיל זה נחזור לדוגמה 7.6.5, ונפתור את נוסחת הנסיגה $T(n) = 2T(n/2) + n\log n$ בשיטה שנפתח במיוחד בשבילה. נחלק את הביטוי ב- n ונקבל:

$$\frac{T(n)}{n} = \frac{2T(n/2)}{n} + \log n$$

נגדיר כעת את $S(n)$ בתור $T(n)/n$. מתקבלת נוסחת הנסיגה הבאה ל- $S(n)$:

$S(n) = S(n/2) + \log n$.

נסו לפתור אותה בשיטות המוכרות לכם. מהו פתרון הנוסחה המקורית $T(n)$?

הערות היסטוריות

ג'יימס סטירלינג James Stirling (סקוטלנד 1770-1692). חקר בעיקר נושאים בתחום האנליזה המתמטית כמו: סדרות אינסופיות, סכומים ואינטרפולציה. הקירוב האסימפטוטי של סטירלינג ל- $n!$ מופיע בסעיף 7.2. כמו-כן, עסק סטירלינג בהתכנסות של מכפלות אינסופיות.